Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Bartolomeo Todeschini

Sul problema di Rayleigh

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 189–193.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_189_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Aerodinamica. — *Sul problema di Rayleigh*. Nota [(*)] di BARTOLOMEO TODESCHINI, presentata [(**)] dal Socio B. FINZI.

Il problema del movimento di un fluido viscoso, occupante il semispazio $y > 0$ e inizialmente in quiete, allorché la sponda $y = 0$ che lo delimita viene fatta scorrere con velocità costante U, è stato risolto da Lord Rayleigh [(1)] nell'ipotesi dell'incomprimibilità. Lo stesso problema risulta ben più complicato se si vuol tener conto della comprimibilità del fluido: al riguardo mi interessa citare i lavori di Lagerstrom–Cole–Trilling [(2)], di Howarth [(3)] e di Hanin [(4)].

In questa Nota desidero chiarire la relazione tra il caso comprimibile e quello incomprimibile, e precisare le condizioni sotto le quali è possibile ottenere la soluzione relativa al primo caso perturbando la soluzione di Rayleigh.

1. Indichiamo con u e v le componenti della velocità del fluido secondo gli assi (fissi) x (diretto come la velocità U della sponda) e y, con $p\ \rho\ T$ la pressione, la densità e la temperatura assoluta, con $\lambda\,\mu\,\nu$ i due coefficienti di viscosità e il coefficiente di viscosità cinematica ($= \mu/\rho$) con k il coefficiente di conducibilità termica, con c_p il calore specifico a pressione costante, con a la celerità del suono [(5)]. Supponiamo che il fluido sia un gas perfetto. Facciamo diventare adimensionali le precedenti grandezze, nonché le variabili indipendenti y e t (il tempo): queste sono le sole che intervengono nel problema in esame, perché manca ogni dipendenza da x. A tal fine poniamo:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} u = Uu^* \quad , \quad v = \bar{a}v^* \quad , \quad p = \bar{p}p^* \quad , \quad \rho = \bar{\rho}\rho^* \quad , \quad T = \bar{T}T^*, \\ \lambda = \bar{\mu}\lambda^* \quad , \quad \mu = \bar{\mu}\mu^* \quad , \quad k = \bar{k}k^* \quad , \quad c_p = \bar{c}_p c_p^* \ , \\ y = \bar{\nu}y^*/\bar{a} \quad , \quad t = \bar{\nu}t^*/\bar{a}^2 \ , \end{array}\right.$$

ove i soprassegni denotano le grandezze (costanti) relative allo stato iniziale.

Le equazioni che traducono la conservazione della massa e il teorema della quantità di moto secondo gli assi x e y si scrivono allora (tralasciando, qui e nel seguito, gli asterischi indicanti l'adimensionalità; denotando con indici posti a destra la derivazione parziale, rispetto a y o a t, e introducendo

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 gennaio 1965.

(1) LORD RAYLEIGH, «Phil. Mag.», (6), *21* (697–711 (1911); «Scientific Papers», *6*, 39, 40.

(2) P. A. LAGERSTROM, J. D. COLE, L. TRILLING, G.A.L.C.I.T. Report (1949).

(3) L. HOWARTH, «Quart. J. of Mech. and Applied Math.», IV, 157–169 (1951).

(4) M. HANIN, «Quart J. of Mech. and Applied Math.», XIII 184–198 (1960).

(5) $\lambda\,\mu\,k\,c_p$, nonché il rapporto γ tra i calori specifici, non saranno costanti, ma dipenderanno in generale dalla temperatura. È noto che anche in tal caso risulta $a^2 = \gamma p/\rho$.

l'operatore

$$d/dt = (\ )_t + (\ )_y\, v$$

che rappresenta la derivazione sostanziale rispetto al tempo),

$$d\rho/dt + \rho\, v_y = 0\,, \tag{2}$$

$$\rho\, du/dt = (\mu\, u_y)_y\,, \tag{3}$$

$$\rho\, dv/dt + \bar{\gamma}^{-1}\, p_y = [\,(\lambda + 2\,\mu)\, v_y]_y\,. \tag{4}$$

V'è poi l'equazione di stato termica dei gas perfetti, che in forma adimensionale si scrive:

$$p = \rho\, T \tag{5}$$

e l'equazione dell'energia (espressione del primo principio della Termodinamica)

$$\begin{aligned}\rho\, c_p\, dT/dt - (1 - \bar{\gamma}^{-1})\, dp/dt = Pr^{-1}\,(kT_y)_y - \rho\, q\, + \\ + (\bar{\gamma} - 1)\,[M^2\, \mu u_y^2 + (\lambda + 2\,\mu)\, v_y^2\,]\end{aligned} \tag{6}$$

[(6)].

In quest'ultima appare la dipendenza dai numeri di Mach e di Prandtl definiti da

$$M = U/\bar{a}\quad,\quad Pr = \bar{\mu}\, \bar{c}_p/\bar{k}\,, \tag{7}$$

e figura il calore q emesso dall'unità di massa del gas nell'unità di tempo non per conduzione (ma ad esempio per irraggiamento); tale calore è stato reso adimensionale dividendolo per

$$\bar{c}_p\, \bar{T}\, \bar{a}^2/\bar{\nu}\,.$$

2. Supponiamo che il fluido si comporti come incomprimibile, nel senso che risulta $\rho =$ cost. ($= 1$, perché ρ è la densità adimensionale, rapporto tra la densità e la densità iniziale). Le (2) (3) (4) costituiscono allora un sistema di tre equazioni differenziali nelle tre funzioni incognite $u\ v\ p$ delle variabili y e t. Se si tiene conto delle ovvie condizioni, iniziali, al contorno e asintotiche

$$\begin{cases} u\,(y\,,0) = v\,(y\,,0) = 0 \quad,\quad p\,(y\,,0) = 1 & (y \geq 0) \\ u\,(0\,,t) = 1 \quad,\quad v\,(0\,,t) = 0\,, & (t > 0) \end{cases} \tag{8}$$

$$\lim_{y\to\infty} u = \lim_{y\to\infty} v = 0 \quad,\quad \lim_{y\to\infty} p = 1\,,$$

e si ritiene costante ($= 1$) il coefficiente (adimensionale) di viscosità μ, si arriva subito alla soluzione di Rayleigh, che contrassegno con l'indice $_1$ posto a sinistra,

$${}_1u = 1 - \mathrm{erf}\,\eta\quad,\quad {}_1v = 0\quad,\quad {}_1p = 1 \tag{9}$$

$$\left(\eta = \frac{y}{2\sqrt{t}}\quad,\quad \mathrm{erf}\,\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta e^{-\xi^2}\, d\xi\right).$$

(6) Cfr. ad esempio: *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, III, 11, (1958).

Volendo tener conto della dipendenza di μ dalla temperatura T, basta associare alle precedenti equazioni l'equazione (5), che definisce T come funzione dello stato del gas: essa, per la (2) e la (4), dà subito

$$(9') \qquad {}_1T = 1\,,$$

da cui $\mu = 1$ e ancora le (9). Si noti che non è possibile imporre alla temperatura T alcuna particolare condizione al contorno, indipendente dalle (8), che la ponga, ad esempio, in relazione con la temperatura della sponda, perché la T è completamente individuata dall'equazione *finita* di stato (5).

Risolto il problema di Rayleigh con le (9) (9'), indipendentemente dai valori dei puri numeri M e Pr, resta da considerare l'equazione dell'energia (6). Essa permette di individuare il calore q, per unità di massa e di tempo, che il gas *deve* emettere (per irraggiamento o altro), se si vuole che esso effettivamente non esplichi la sua comprimibilità. Si trova:

$$(10) \qquad q = {}_1q = (\gamma - 1)\, M^2\, {}_1u_y^2\,.$$

Fissato un $y > 0$, ${}_1q$ raggiunge il massimo valore $2(\gamma - 1)\, M^2/(\pi e y^2)$ per $t = y^2/2$. Finito, qualunque sia t, risulta il calore

$$(11) \qquad Q = \int_0^t dt \int_0^\infty {}_1q\, dy = (\gamma - 1)\, M^2 \sqrt{2\, t/\pi}$$

emesso entro una colonna indefinita di base unitaria, parallela all'asse y, dall'inizio all'istante t (7).

3. Se il fluido esplica la sua comprimibilità, le funzioni incognite sono cinque, $u\, v\, p\, \rho\, T$, e quindi le quattro equazioni (2) (3) (4) (5) non bastano a determinarle: è indispensabile associare ad esse l'equazione dell'energia (6), che ora, a differenza del caso di Rayleigh, ha un ruolo fondamentale. Il calore q non è più determinabile a–posteriori ricavandolo dalla (6), ma dev'essere assegnato a–priori, in relazione alle condizioni fisiche in cui avviene il fenomeno: ad esempio lo si può supporre nullo, o dato da una certa funzione della temperatura se v'è irraggiamento secondo una certa legge.

La temperatura è ora essenzialmente determinata dall'equazione *differenziale* (6), e quindi ad essa si dovrà imporre una particolare condizione al contorno: per esempio, come si fa di solito nell'aerodinamica dei gas non rarefatti, il raccordo

$$(12) \qquad T(0\,, t) = \mathcal{T}$$

con la temperatura $\mathcal{T}$ della sponda, da ritenersi costante assegnata (eventualmente diversa da 1, cioè dal valore adimensionale della temperatura iniziale del gas).

(7) Q risulta finito, sebbene per $y = 0$ il calore q per unità di massa e di tempo tenda all'infinito quando $t \to 0$.

Dalle osservazioni precedenti risulta evidente che una soluzione relativa al caso della comprimibilità potrà ottenersi perturbando la soluzione (9) valida per i fluidi incomprimibili, se

a) si sceglie il calore q per unità di massa e di tempo poco diverso dal calore ${}_1q$ che si sviluppa nel caso incomprimibile di Rayleigh;

b) si impone alla temperatura T una condizione al contorno eguale o prossima a quella che si ha nel caso incomprimibile.

Poniamo:

$$(13)\quad \begin{cases} u = {}_1u + {}_2u \quad , \quad v = {}_2v \quad , \quad q = {}_1q + {}_2q \\ p = 1 + {}_2p \quad , \quad \rho = 1 + {}_2\rho \quad , \quad T = 1 + {}_2T \\ \lambda = \bar{\lambda}/\bar{\mu} + {}_2\lambda \quad , \quad \mu = 1 + {}_2\mu \quad , \quad k = 1 + {}_2k \quad , \quad c_p = 1 + {}_2c_p \, , \end{cases}$$

e riguardiamo come piccole con le loro derivate, e incognite, le quantità adimensionali contrassegnate dall'indice 2 a sinistra (mentre sono note quelle con l'indice 1).

Introducendo le (13) nelle equazioni (2) → (6) e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si hanno le equazioni, lineari, delle piccole perturbazioni:

$$(2'')\qquad {}_2\rho_t + {}_2v_y = 0$$

$$(3'')\qquad {}_2u_t - {}_2u_{yy} = {}_1u_t\,({}_2\mu - {}_2\rho) + {}_1u_y\,({}_2\mu_y - {}_2v)$$

$$(4'')\qquad {}_2v_t + \bar{\gamma}^{-1}\,{}_2p_y = (\bar{\lambda}/\bar{\mu} + 2)\,{}_2v_{yy}$$

$$(5'')\qquad {}_2p = {}_2\rho + {}_2T \text{ [8]}$$

$$(6'')\qquad {}_2T_t - (1 - \bar{\gamma}^{-1})\,{}_2p_t - Pr^{-1}\,{}_2T_{yy} = (\bar{\gamma} - 1)\,M^2\,{}_1u_y\,[{}_1u_y\,({}_2\mu - {}_2\rho) + 2\,{}_2u_y] - {}_2q\,.$$

4. Come si è visto, quando non esplica affatto la sua comprimibilità, il fluido sviluppa una ben determinata quantità di calore per unità di massa e di tempo ${}_1q$, data dalla (10); se si vuole che il fluido si comporti come poco comprimibile, occorre fare in modo che il calore q che esso sviluppa sia prossimo a ${}_1q$: allora valgono le soprascritte equazioni delle piccole perturbazioni.

Si può prendere in particolare $q = 0$ (come fanno gli Autori che ho citato), tutte le volte che ${}_1q$ risulta prossimo a zero. In tal caso il secondo membro della (6″) si riduce a

$$(6''_1)\qquad (\bar{\gamma} - 1)\,M^2\,{}_1u_y\,({}_1u_y + 2\,{}_2u_y)\,.$$

Ora, ${}_1q$ è prossimo a zero, per valori non troppo piccoli di t, quando il *particolare* numero di Mach $M = U/\bar{a}$ che interviene nel fenomeno è piccolo:

(8) Le (2″) (4″) (5″) corrispondono alle analoghe equazioni riportate nei lavori che ho citato, per esempio in quello di Hanin, con la sola differenza che la (4″) prescinde dalla relazione di Stokes $\lambda = -2\,\mu/3$. La (3″), invece, non vi figura.

tale lo suppongono infatti i predetti Autori, che ottengono di conseguenza, per il secondo membro della (6''), la forma ulteriormente semplificata

$$(6''_2) \qquad (\gamma - 1)\, M^2\, {}_1u_y^2 .$$

Resta dunque confermato nel caso in esame che a piccoli numeri di Mach il gas esplica poco la sua comprimibilità [9].

Ma ${}_1q$ è piccolo, precisamente minore di un numero ε da dirsi piccolo, anche per valori non piccoli del numero di Mach M, quando è piccolo ${}_1u_y^2$, il che avviene se si considerano valori delle variabili indipendenti soddisfacenti alla

$$(14) \qquad t > (\gamma - 1)\, M^2/(\pi\, \varepsilon)$$

o alla

$$(15) \qquad y^2 > 2\, t \log\, [(\gamma - 1)\, M^2/(\pi\, \varepsilon\, t)] :$$

anche allora valgono dunque le equazioni precedenti.

Quanto alla condizione al contorno per la temperatura, che, come s'è detto, deve essere uguale o prossima a quella che si ha nel caso di Rayleigh, gli Autori citati la scelgono, non secondo la (12), fissando cioè la temperatura di parete, ma così:

$$(16) \qquad T_y\,(0\,,t) = 0\,;$$

questa esprime l'ipotesi che la sponda sia termicamente isolante, ed è esattamente soddisfatta, per la (9'), dalla soluzione di Rayleigh.

(9) A questa conclusione in altri casi si perviene per altra via, ad esempio per mezzo della nota formula $\rho_0/\rho = [1 + (\gamma - 1)\, M^2/2]^{1/(\gamma - 1)}$, che si riferisce alle ordinarie correnti stazionarie, ove ρ_0 è la densità di arresto ed M il numero di Mach *locale*.