Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Salvatore Cherubino

Ottimi paretiani dei valori nominale e intrinseco della produzione di un sistema economico e analoghi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 185–188.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_185_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Economia matematica. — *Ottimi paretiani dei valori nominale e intrinseco della produzione di un sistema economico e analoghi* [*]. Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata [**] dal Socio B. SEGRE.

1. Il valore nominale e intrinseco della produzione o del consumo totale di un sistema economico e analoghe grandezze economiche posseggono un minimo o massimo impropri che scaturiscono immediatamente dalla considerazione delle disuguaglianze caratteristiche.

Se in queste si sostituiscono i vettori $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ necessari dei consumi e della forza-lavoro per produzione unitaria con determinazioni di esse maggiori o uguali si hanno eguaglianze caratteristiche che si risolvono con determinazioni dei vettori $\mathbf{X}$ e $\boldsymbol{p}$ delle produzioni e dei prezzi rispettivi. Queste soluzioni sono ottimi paretiani dai quali se ne ottengono altri per varie grandezze economiche.

È quello che in questa Nota si dimostra facilmente mediante un risultato di un nostro precedente lavoro [1].

2. La prima disuguaglianza caratteristica è:

$$\mathbf{X}_{-1} = [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}\, \mathbf{Y}_{-1}, \tag{1}$$

con $\boldsymbol{a}$ matrice non negativa di ordine n dei coefficienti tecnici, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ vettori della produzione e dei consumi necessari nel sistema economico, quindi positivo il primo, positivo o semipositivo il secondo. La matrice:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1} = [\alpha_{rs}] \tag{2}$$

è $\geq \mathbf{O}$ o $> \mathbf{O}$ secondo che l'economia, ossia $\boldsymbol{a}$, è riducibile oppur no. Indichiamo con $\alpha_{(r)}, \alpha_{-1}^{(r)}$ la riga e la colonna r^{ma} di $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}$. Si ha:

$$\mathrm{X}_s \geqq \alpha_{(s)}\, \mathbf{Y}_{-1}, \qquad s = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

e sostituiamo nella:

$$x_{rs} = a_{rs} \cdot \mathrm{X}_s, \qquad r, s = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

sicché si ha, essendo $a_{rs} \geqq 0$:

$$x_{rs} = a_{rs} \cdot \alpha_{(s)}\, \mathbf{Y}_{-1} \tag{5}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca 43 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) *Trasformazione dei coefficienti tecnici*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XXXVII, p. 381 (1964), n. 2.

oppure

$$(5)_1 \qquad x_{rs} > a_{rs} \cdot \alpha_{(s)} \mathbf{Y}_{-1}, \qquad r, s = 1, 2, \cdots, n.$$

Aumentando di 1 la componente y_r di $\mathbf{Y}_{-1}$ si ha che α_s è l'aumento minimo della produzione X_s, com'è mostrato dalla (3); cioè α_r è l'aumento minimo della produzione X_s corrispondente all'aumento unitario del consumo del settore r. Ne segue che $a_{rs}\,\alpha_{st}$ è l'aumento minimo delle vendite del settore r a quello s provocato dall'aumento unitario del consumo nel settore t. Ed infine che:

l'aumento minimo di impiego di forza-lavoro in tutta l'economia del sistema considerato, cioè nei suoi n settori, provocato dall'aumento unitario di consumo nel settore t, è

$$\mathrm{a}_{(n-1)}\,\alpha_{-1};$$

quindi [2]:

$$(6) \qquad \frac{p_t}{p_{n+1}} \geqq \mathrm{a}_{(n+1)} \cdot \alpha_{-1}(t)$$

è *il corrispondente prezzo relativo del settore t.*

La (6) si è ottenuta tenendo conto che, dalla seconda disuguaglianza caratteristica:

$$(7) \qquad \boldsymbol{p} \geq \mathbf{Z}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1},$$

si ha che:

$$(8) \qquad \mathbf{Z} = p_{n+1} \cdot \mathrm{a}_{(n+1)}.$$

3. Il valore nominale della produzione del sistema è:

$$(9) \qquad \boldsymbol{p}\mathbf{X}_{-1} \geqq \boldsymbol{p} \cdot [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}\,\mathbf{Y}_{-1} = \varphi(\boldsymbol{p}, \mathbf{Y}_{-1}),$$

mentre il valore intrinseco della stessa si esprime con:

$$(10) \qquad \mathbf{Z}\mathbf{X}'_{-1} \geqq \mathbf{Z} \cdot [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}\,\mathbf{Y}_{-1} = \psi(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{-1}),$$

onde si ha:

a) *i valori nominale ed intrinseco della produzione totale del sistema economico hanno rispettivamente per minimo i valori delle due forme bilineari* $\varphi(\boldsymbol{p}, \mathbf{Y}_{-1})$ *e* $\psi(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{-1})$, *entrambe di matrice* $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}$.

Si ha pure che:

$$(11) \qquad \boldsymbol{p}\mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Z}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-2}\,\mathbf{Y}_{-1} = \chi(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{-1}),$$

cioè:

b) *il valore nominale della produzione totale del sistema economico ha per minimo il valore della forma bilineare* $\chi(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{-1})$ *di matrice* $(\mathrm{I} - \boldsymbol{a})^{-2}$. Si noti che dalla $\varphi(\boldsymbol{p}, \mathbf{Y}_{-1})$ si passa alla $\chi(\mathbf{Z}, \mathbf{Y}_{-1})$ a mezzo della (7).

(2) S. CHERUBINO, *Sui fondamenti matematici della teoria dell'equilibrio generale economico* («L'industria», n. 3 del 1956), § 6, p. 316.

Si ha poi che:

(12) $$\boldsymbol{p}\mathbf{Y}_{-1} \leqq \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^2\,\mathbf{X}_{-1} = \sigma\,(\boldsymbol{p}\,,\mathbf{X}_{-1}),$$

e questa ci dice che:

c) *il valore intrinseco del consumo totale del sistema economico ha per massimo la forma bilineare* $\sigma\,(\boldsymbol{p}\,,\mathbf{X}_{-1})$ *avente la matrice* $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^2$.

Infine:

(13) $$\boldsymbol{p}\mathbf{Y}_{-1} \geqq \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} = \pi\,(\boldsymbol{p}\,,\mathbf{X}_{-1});$$

dunque:

d) *il minimo del valore nominale del consumo totale del sistema* è *la forma bilineare* $\pi\,(\boldsymbol{p}\mathbf{X}_{-1})$ di matrice $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]$.

I massimi e minimi qui trovati sono tutti impropri, cioè si ha $\leqq$ o $\geqq$ per definizione.

4. Ricordiamo (3) che se nelle disuguaglianze caratteristiche si sostituiscono $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Z}$ rispettivamente coi due vettori $\overline{\mathbf{Y}}$ e $\overline{\mathbf{Z}}$ maggiori o eguali (minori o eguali) rispettivamente di $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Z}$, esse diventano le uguaglianze:

(15) $$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] = \overline{\mathbf{Z}} \geqq \mathbf{Z}$$

(15)1 $$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \leqq \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] = \overline{\mathbf{Z}} \leqq \mathbf{Z}.$$

Diciamo $\mathbf{X}^0$, $\boldsymbol{p}^0$ le soluzioni delle equazioni:

(16) $$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] = \overline{\mathbf{Z}};$$

esse diventano le soluzioni *ottime* di dette equazioni; ossia allontanandosi da esse almeno una delle loro componenti diventa minore o maggiore di quello che era nell'ottimo $\mathbf{X}^0$, $\boldsymbol{p}^0$, cioè si ha:

(17) $$\mathbf{X}^0 \geqq \mathbf{X}' \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0 \geqq \boldsymbol{p}'$$

oppure

(17)1 $$\mathbf{X}^0 \leqq \mathbf{X}' \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0 \leqq \boldsymbol{p}',$$

con:

(18) $$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}'_{-1} \geqq \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}'\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \geqq \overline{\mathbf{Z}},$$

(18)1 $$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}'_{-1} \leqq \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}'\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \leqq \overline{\mathbf{Z}},$$

sicché $\mathbf{X}^0$, $\boldsymbol{p}^0$ sono massimi o minimi, impropri o propri dei vettori soddisfacenti alla (1) ed alla (7), rispettivamente, ossia si hanno le (18), (18)1.

Si ha allora che:

1° $\varphi\,(\boldsymbol{p}^0, \overline{\mathbf{Y}}_{-1})$ *dà l'ottimo valore nominale della produzione del sistema;*

2° $\psi\,(\overline{\mathbf{Z}}\,, \overline{\mathbf{Y}}_{-1})$ *dà l'ottimo valore intrinseco della produzione del sistema;*

3° $\chi\,(\overline{\mathbf{Z}}\,, \overline{\mathbf{Y}}_{-1})$ *dà l'ottimo valore nominale della produzione del sistema,*

(3) Nota cit. (1), n. 3.

quindi è:

(19) $$\varphi(\boldsymbol{p}^0, \overline{\mathbf{Y}}_{-1} = \chi(\overline{\mathbf{Z}}, \overline{\mathbf{Y}}_{-1}),$$

il che è evidente a priori perché si ha:

(20) $$\boldsymbol{p}^0 [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}) = \overline{\mathbf{Z}};$$

4^0 $\sigma(\boldsymbol{p}^0, \mathbf{X}^0_{-1})$ *dà l'ottimo valore intrinseco dei consumi del sistema;*

5^0 $\pi(\boldsymbol{p}^0, \mathbf{X}^0_{-1})$ *dà l'ottimo valore nominale dei consumi del sistema.*

5. Il vettore $\mathbf{C}$ del capitale netto investito negli n vettori ed il prezzo delle rispettive produzioni soddisfano alle seguenti disuguaglianze caratteristiche:

(21) $$\begin{cases} [\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]\,\mathbf{C}_{-1} \geqq [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} \\ \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}] \geqq \mathbf{Z}' = \mathbf{Z} + \boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{a}}, \end{cases}$$

che dànno luogo alle corrispondenti eguaglianze caratteristiche [4]:

(22) $$[\mathrm{I} = \boldsymbol{b}]\,\mathbf{C}^0_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}^*_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}] = \overline{\mathbf{Z}}^* + \boldsymbol{p}^0\,\overline{\boldsymbol{a}},$$

le quali possono scriversi:

(23) $$\mathbf{C}^0_{-1} = [\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]^{-1}\,\overline{\mathbf{Y}}^*_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0 = \overline{\mathbf{Z}}^*\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}.$$

Queste dànno luogo alle altre [5]

(24) $$\boldsymbol{p}^0\,\mathbf{C}^0_{-1} = \boldsymbol{p}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]^{-1}\,\overline{\mathbf{Y}}^* = \overline{\varphi}(\boldsymbol{p}^0, \overline{\mathbf{Y}}^*_{-1}),$$

(25) $$\mathbf{Z}^*\,\mathbf{C}^0_{-1} = \overline{\mathbf{Z}}^*\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]^{-1}\,\overline{\mathbf{Y}}^*_{-1} = \overline{\psi}(\mathbf{Z}^*, \overline{\mathbf{Y}}^*_{-1}),$$

che sono i *valori nominali ed intrinseco ottimi del capitale investito.*

Si ha pure, in modo analogo, che:

$\overline{\chi}(\overline{\mathbf{Z}}^*, \overline{\mathbf{Y}}^*_{-1})$ *dà il vettore nominale ottimo del capitale del sistema;* quindi che:

(26) $$\overline{\varphi}(\boldsymbol{p}^0, \overline{\mathbf{Y}}^*_{-1}) = \overline{\chi}(\overline{\mathbf{Z}}^*, \overline{\mathbf{Y}}^*_{-1}).$$

Il valore intrinseco ottimo del consumo del sistema è $\overline{\sigma}(\boldsymbol{p}^0, \mathbf{C}^*_{-1})$; *l'ottimo valore nominale dei consumi del sistema* è $\overline{\pi}(\boldsymbol{p}^0, \mathbf{C}^*_{-1})$.

In modo analogo si hanno gli ottimi conseguibili dalle disuguaglianze caratteristiche $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{R}_{-1} \geqq \mathbf{J}_{-1}$.

(4) Ved. n. 4 della Nota cit. (1).

(5) Si tenga presente che si ha:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]\,\mathbf{C}_{-1} \geqq \mathbf{Y}^*_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}] \geqq \mathbf{Z}^* + \boldsymbol{p}\overline{\boldsymbol{a}}.$$