Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Orazio Sorace

Trasformazioni cremoniane inerenti ad una qualsiasi estensione algebrica di un campo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 178–184.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_178_0>

Geometria. — *Trasformazioni cremoniane inerenti ad una qualsiasi estensione algebrica di un campo* (*). Nota di ORAZIO SORACE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

1. Il metodo con cui B. Segre [1] ha associato ad ogni estensione algebrica finita separabile, e quindi semplice, una trasformazione cremoniana involutoria, viene in questo lavoro trasportato al caso di una qualsiasi estensione algebrica finita, anche inseparabile. La forma Jacobiana di una tale trasformazione birazionale, pur esprimendosi allo stesso modo nei due casi, si decompone, in un'opportuna estensione, in maniera tale da dare la possibilità di ottenere, per le estensioni inseparabili, una maggiore varietà di tipi di trasformazioni cremoniane. Così, ad esempio, nel caso di un'estensione puramente inseparabile ([2], p. 68), cioè nel caso di un'estensione che nasca dal campo base con l'aggiunzione di radici p^e–esime (p caratteristica del campo; e intero positivo), la trasformazione cremoniana risulta intera. Nel caso delle suddette estensioni puramente inseparabili, si ottengono inoltre condizioni atte ad assicurare la possibilità di associare all'estensione più di una trasformazione cremoniana involutoria.

2. Riferiamoci ad un campo δ che sia un'estensione finita, e quindi algebrica, propria, di grado $n \geq 2$, di un fissato campo γ; e sia $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ una qualunque base di δ su γ, talché due elementi ξ, η qualsiansi di δ possono rappresentarsi, ed in modo unico, mediante le

$$\xi = x_i u_i \quad , \quad \eta = y_i u_i \qquad (x_i , y_i \in \gamma) ,$$

dove, nei secondo membri (e similmente in seguito), sottintendiamo la somma per $i = 1, 2, \cdots, n$. Introdotte – come in B. Segre [1] – le costanti di struttura c^l_{ij} mediante le

$$u_i u_j = c^l_{ij} u_l \qquad (c^l_{ij} \in \gamma)$$

e, posto

$$\varphi^l_j(x) = c^l_{ij} x_i , \tag{1}$$

si avrà

$$\xi\eta = \varphi^l_j(x)\, y_j\, u_l . \tag{2}$$

La norma dell'elemento ξ, nell'estensione δ/γ, è notoriamente il determinante $\mathrm{D}(x)$ della matrice $\Delta(x)$ delle (1), ossia:

$$\mathrm{Norm.}_{\delta/\gamma}\, \xi = \mathrm{N}(\xi) = \mathrm{D}(x) = \det.\, \Delta(x) .$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R. per l'anno 1964–65.

(**) Nella seduta del 13 febbraio 1965.

Ricordiamo che la norma di un elemento non dipende dalla scelta della base; inoltre, se consideriamo $x_1, x_2, \cdots, x_n$ quali indeterminate, $N(\xi)$ è una forma di grado n in queste ultime, a coefficienti in γ, diversa da zero per ogni scelta delle x non tutte nulle in γ.

Consideriamo l'applicazione T:

$$\xi \to N(\xi)\,\xi^{-1}$$

la quale, ad ogni elemento ξ non nullo di δ, associa quell'elemento η tale che

$$\xi\eta = N(\xi). \tag{3}$$

Ricordando che la norma di un prodotto uguaglia il prodotto delle norme, si vede che la T risulta un endomorfismo nel gruppo moltiplicativo di δ, il cui nucleo è composto da quegli elementi ξ per cui

$$\xi = N(\xi), \tag{4}$$

tali cioè che $\xi \neq 0$, $\xi \in \gamma$; in tal caso è $N(\xi) = \xi^n$, e la (4) diventa $\xi^{n-1} = 1$. Dunque il suddetto nucleo risulta costituito da un numero ν di elementi $(1 \leq \nu \leq n-1)$ eguale a quello delle radici $(n-1)$–esime dell'unità che si trovano in γ.

L'applicazione T fa corrispondere ad η l'elemento $N(\eta)\,\eta^{-1}$; e, poiché

$$N(\eta) = N(N(\xi))\,N(\xi^{-1}) = (N(\xi))^{n-1}, \tag{5}$$

il quadrato di T è l'applicazione

$$\xi \to \xi\,(N(\xi))^{n-2}. \tag{6}$$

Per semplicità di scrittura, supponiamo ora che u_1 sia l'elemento unità, al che ci si può sempre ridurre con un'opportuna trasformazione lineare sugli u_i.

La (3), per la (2), ci dà il sistema

$$\varphi_j^1(x)\,y_j = N(\xi) \quad ; \quad \varphi_j^l(x)\,y_j = 0 \qquad (l = 2, 3, \cdots, n); \tag{7}$$

onde, chiamando $g_i(x)$ il complemento algebrico in $\Delta(x)$ dell'elemento φ_i^1, l'applicazione T si traduce nelle

$$y_i = g_i(x), \tag{8}$$

le $g_i(x)$ essendo forme di grado $n-1$ nelle $x_1, x_2, \cdots, x_n$, a coefficienti in γ.

Avuto anche riguardo alla (6), possiamo concludere (con B. Segre [1]) che: *Se si interpretano le x, y quali coordinate omogenee di due punti corrispondenti in un S_{n-1} proiettivo su γ, le* (8) *definiscono una trasformazione cremoniana involutoria di S_{n-1} in sè, inerente all'estensione algebrica da γ a δ.*

3. Il caso in cui l'estensione finita δ/γ sia separabile, e quindi semplice, è stato esaurientemente trattato da B. Segre in [1]. In seguito considereremo il caso in cui l'estensione finita δ/γ sia inseparabile (ed eventualmente non semplice). Ne discende che il campo γ dovrà avere caratteristica $p > 0$ e

non essere perfetto, perché, se avesse caratteristica zero o se fosse perfetto, una qualunque sua estensione sarebbe separabile.

Ricordiamo ([3], p. 123) che, se γ_0 è la massima estensione separabile di γ in δ, sarà δ puramente inseparabile su γ_0; cioè, per ogni $\xi \in \delta$, si avrà un minimo esponente $e \geq 0$ per cui $\xi^{p^e} \in \gamma_0$. Il massimo di tali esponenti al variare di ξ in δ, che designeremo ancora con e, dicesi l'e s p o n e n t e dell'estensione δ/γ. Il grado $n_0 = (\gamma_0 : \gamma)$ dicesi il g r a d o r i d o t t o dell'estensione δ/γ. L'intero positivo f per cui $n = n_0 p^f$ soddisfa alla $f \geq e$. L'estensione è semplice se, e soltanto se, $f = e$ ([3], p. 127).

È noto che, se δ^* è la minima estensione normale di γ contenente δ, vi sono n_0 γ–isomorfismi di δ in δ^*; li denoteremo con $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n_0}$. Detto $u_i \varphi_j$ il corrispondente di u_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ nel γ–isomorfismo φ_j $(j = 1, 2, \cdots, n_0)$, la norma dell'elemento ξ vien data da ([2], p. 91):

$$\text{(9)} \qquad N(\xi) = \left(\prod_{j=1}^{n_0} x_i u_i \varphi_j \right)^{p^f} .$$

4. Determiniamo ora la forma Jacobiana della trasformazione birazionale (8). Tenendo presente che, per le (1), è

$$\frac{\partial \varphi_j^l(x)}{\partial x_i} = c_{ij}^l$$

e che, per la (9), è

$$\frac{\partial N(\xi)}{\partial x_i} = 0 ,$$

derivando le (7) si ha:

$$\varphi_j^l(x) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = - c_{ij}^l y_j = - \varphi_i^l(y) \qquad (l = 1, 2, \cdots, n);$$

in altri termini, la matrice formata con le $- \varphi_i^l(y)$ è il prodotto della matrice $\Delta(x)$ per la matrice Jacobiana delle (8). Passando ai determinanti, si ha quindi

$$J(x) N(\xi) = (-1)^n N(\eta) ,$$

dove denotiamo con $J(x)$ la forma Jacobiana delle (8). In virtù della (5), e per ogni scelta delle x_i non tutte nulle, si avrà di conseguenza l'identità

$$J(x) = (-1)^n (N(\xi))^{n-2} ,$$

la quale non differisce da quella ottenuta da B. Segre [1] nel caso separabile; nel caso inseparabile, in virtù della (9) essa – in δ^* – può anche venir scritta nel modo seguente:

$$\text{(10)} \qquad J(x) = (-1)^n \left(\prod_{j=1}^{n_0} x_i u_i \varphi_j \right)^{(n-2) p^f} .$$

5. Estenderemo alle suddette trasformazioni cremoniane alcune proprietà dimostrate in [4] nel caso del campo complesso.

Se l'iperpiano $a_i x_i = 0$ è una componente della Jacobiana, allora l'ipersuperficie $a_i g_i(x) = 0$ è una ipersuperficie totalmente eccezionale del sistema lineare omaloidico $\lambda_i g_i(x) = 0$; cioè le sue componenti irriducibili sono tutte componenti della Jacobiana.

Infatti, siano ξ_j $(j = 1, 2, \cdots, n_0)$ i coniugati distinti di ξ in δ^* (supporremo, per fissare le idee, che φ_1 sia l'identità, e quindi $\xi = \xi_1$), cioè poniamo:

$$\xi_j = x_i u_i \varphi_j .$$

Le componenti irriducibili della Jacobiana, sono, per la (10), gli iperpiani $\xi_j = 0$. Le ipersuperficie $g_i(x) u_i \varphi_j = 0$ sono totalmente eccezionali. Infatti, per le (8), (3), (9), risulta

$$g_i(x) u_i \varphi_j = \xi_1^{p^f} \cdots \xi_{j-1}^{p^f} \xi_j^{p^f - 1} \xi_{j+1}^{p^f} \cdots \xi_{n_0}^{p^f} .$$

Il determinante della matrice formata con gli esponenti con cui le componenti della Jacobiana entrano come fattori nelle singole forme $g_i(x) u_i \varphi_j$ vale $\pm (n - 1)$.

Infatti tale matrice, di ordine n_0, ha tutti gli elementi uguali a p^f tranne quelli della diagonale principale, ciascuno dei quali è uguale a $p^f - 1$. Il suo determinante (poiché $n = n_0 p^f$) vale dunque precisamente:

$$(-1)^{n_0} + n_0 p^f (-1)^{n_0 - 1} = (-1)^{n_0 - 1} (n - 1) .$$

6. Consideriamo, in particolare, il caso in cui γ sia quasi-algebricamente chiuso in δ, cioè risulti $\gamma = \gamma_0$, e quindi $n_0 = 1$ ed $n = p^f$. L'estensione δ/γ considerata è pertanto puramente inseparabile. In tal caso non ci sono γ-isomorfismi, all'infuori dell'identità, e la norma dell'elemento ξ è ξ^n. L'applicazione T diventa $\xi \to \xi^{n-1}$ $(\xi \neq 0)$. Mostreremo che:

La trasformazione cremoniana di cui al n. 2 è ora intera.

Infatti, operando sulle coordinate $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ di un punto dell'S_{n-1} la sostituzione lineare invertibile:

$$Z_i = z_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n - 1),$$
$$Z_n = z_1 u_1 + z_2 u_2 + \cdots + z_n u_n ,$$

le (8) si mutano in equazioni del tipo $Y_i = G_i(X)$. Ora però risulta $G_n(X) = X_n^{n-1}$, poiché

$$Y_n = y_i u_i = (x_i u_i)^{n-1} = X_n^{n-1},$$

onde l'asserto.

Vogliamo determinare tutte le trasformazioni cremoniane involutorie di un certo tipo inerenti ad una data estensione puramente inseparabile. Consideriamo l'applicazione

$$(11) \qquad \xi \to \xi^m \qquad (1 < m \leq n - 1 , \xi \neq 0) .$$

Per $m = n - 1$, abbiamo l'applicazione T sopra considerata. Ci proponiamo precisamente di trovare, se esistono, altri valori di m per cui alla (11) si possa associare una trasformazione cremoniana involutoria. Dovrà corrispondentemente esistere un intero $k > 0$, tale che il quadrato della (11) sia

$$\xi \to \xi\,(\mathrm{N}\,(\xi))^k\,;$$

dovrà cioè essere $\xi^{m^2} = \xi\,(\mathrm{N}\,(\xi))^k$ e quindi $m^2 = 1 + kn$, ossia:

$$(m - 1)\,(m + 1) = kn\,. \tag{12}$$

Per $f = 1$, *la* $m = n - 1$ *è la sola soluzione della* (12). Invero, $n = p$ è primo con $m - 1$, onde $p = m + 1$.

Per $f > 1$, *oltre la* $m = n - 1$, *si hanno altre soluzioni, e precisamente in numero di due, se e soltanto se* $p = 2\,, f > 2$. Poniamo infatti

$$m + 1 = k_1\, p^{f_1} \quad ; \quad m - 1 = k_2\, p^{f_2}\,, \tag{13}$$

con $f_1 + f_2 = f\,,\ k_1\, k_2 = k$. Sottraendo le (13) a membro a membro, si ricava

$$2 = k_1\, p^{f_1} - k_2\, p^{f_2}\,. \tag{14}$$

Supposto anzitutto $f_1 > f_2$, la (14), scritta sotto la forma

$$2 = p^{f_2}\,(k_1\, p^{f_1 - f_2} - k_2)\,,$$

mostra che la sua validità implica le $f_2 = 0\,,\ k_1 = 1$ e quindi $m + 1 = n$, oppure le $p = 2\,, f_2 = 1\,, f_1 = f - 1$. Se invece si suppone $f_1 < f_2$, la (14), ossia la

$$2 = p^{f_1}\,(k_1 - k_2\, p^{f_2 - f_1})\,,$$

è soddisfatta se e soltanto se $p = 2\,, f_1 = 1\,, f_2 = f - 1$. In conclusione:

L'applicazione $\xi \to \xi^m$ (*porge una ed una sola trasformazione cremoniana involutoria* ($m = n - 1$) *se è* $p \neq 2$ *o se è* $p = 2$, $f = 2$. *Se invece* $p = 2$, $f > 2$ *si ottengono in tutto, per ogni estensione di grado* $n = 2^f$, *tre trasformazioni cremoniane involutorie, corrispondentemente ai valori* $m = n - 1$, $m = \frac{1}{2}n - 1\,, m = \frac{1}{2}n + 1$ *dell'esponente* m.

7. Quanto dianzi esposto vale per ogni estensione finita inseparabile, anche non semplice. Se ammettiamo più particolarmente che l'estensione risulti semplice (tale cioè che $f = e$), i calcoli verranno agevolati dalla seguente rappresentazione degli elementi dell'estensione. Il campo δ sarà attualmente, isomorfo al campo $\gamma\,(\theta)$ ottenuto da γ con l'aggiunzione simbolica di un'indeterminata θ, soggetta ad un'equazione algebrica inseparabile di grado n, grado ridotto n_0, ed esponente e ($n = n_0\, p^e$):

$$f\,(x) = a_0\, x^{n_0 p^e} + a_1\, x^{(n_0 - 1)\, p^e} + a_2\, x^{(n_0 - 2)\, p^e} + \cdots + a_{n_0} = 0 \qquad (a_0 \neq 0), \tag{15}$$

a coefficienti in γ ed ivi irriducibile. Posto per abbreviare $\alpha = \theta^{p^e}$, la massima estensione separabile γ_0 di γ in δ sarà isomorfa al campo $\gamma(\alpha)$ ottenuto da γ con l'aggiunzione simbolica della indeterminata α, soggetta all'equazione separabile di grado n_0:

$$\psi(y) = a_0 y^{n_0} + a_1 y^{n_0-1} + \cdots + a_{n_0}. \tag{16}$$

L'estensione $\gamma(\theta)/\gamma(\alpha)$ è puramente inseparabile, per ogni elemento $\xi \in \gamma(\theta)$ avendosi esattamente $\xi^{p^e} \in \gamma(\alpha)$. Nel campo δ^* di decomposizione della (15), designamo con $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n_0}$ le radici della (16) (distinte, per la supposta separabilità di $\psi(y)$), e con $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n_0}$ le radici (distinte) della (15); si avrà allora

$$f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n_0} (x^{p^e} - \alpha_i) = a_0 \prod_{i=1}^{n_0} (x - \theta_i)^{p^e}.$$

Scegliendo come base $1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^{n-1}$, ogni elemento $\xi \in \delta$ avrà la rappresentazione $\xi = x_i \theta^{i-1}$; ed i coniugati distinti di ξ in δ^* saranno:

$$\xi_j = x_i \theta_j^{i-1} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n_0; \theta = \theta_1).$$

8. Nel caso infine di un'estensione puramente inseparabile semplice, se denotiamo con α un elemento del campo γ (non perfetto) che non sia potenza p-esima di nessun elemento di γ, talché (qualunque sia l'intero $e > 0$), il polinomio

$$x^{p^e} - \alpha \tag{17}$$

è irriducibile in γ, il primo membro della (15) è della forma (17), ed ha in δ, p^e radici θ coincidenti, essendo $\theta^{p^e} = \alpha$. Con la base $u_i = \theta^{i-1}$, sussistono quindi le

$$\begin{cases} u_i u_j = u_{i+j-1} & \text{se } i+j \leq n+1, \\ u_i u_j = \alpha u_{i+j-1-n} & \text{se } i+j > n+1. \end{cases} \tag{18}$$

In forza delle (18), attualmente si ha:

$$D(x) = N(\xi) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \alpha x_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \alpha x_{n-1} & \alpha x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha x_2 & \alpha x_3 & \alpha x_4 & \cdots & x_1 \end{vmatrix}.$$

D'altra parte è $N(\xi) = \xi^n = (x_i \theta^{i-1})^n = x_i^n \alpha^{i-1}$; ne discende che, in un campo non perfetto di caratteristica p, e coi precedenti significati dei simboli, vale l'identità:

$$D(x) = x_i^n \alpha^{i-1}.$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] B. SEGRE, *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane*, « Annali di Mat. » (IV), *64*, 1–76 (1964).
[2] O. ZARISKI–P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, vol. I, University series in higher math., Van Nostrand (1958).
[3] B. L. VAN DER WAERDEN, *Modern Algebra*, vol. I, Ungar, New York (1953).
[4] C. MAMMANA, *Corrispondenze cremoniane e loro jacobiane*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (VIII), *33* (1962).