Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Johannes G. van der Corput

Sul calcolo neutralizzato dei residui

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 166–170.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_166_0>

Matematica. — *Sul calcolo neutralizzato dei residui.* Nota di JOHANNES G. VAN DER CORPUT, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

L'analisi classica si basa su due idee, in primo luogo sulla nozione di limite, indi su una notazione che fa uso del simbolo ∞ e che obbedisce a delle regole simili a quelle delle matematiche finite.

Il presente articolo è dedicato ad un nuovo calcolo, quello delle *neutrici*, che si basa su due idee analoghe, ma più generali. In molti problemi è spesso possibile costruire una classe N tale che trascurare gli elementi ad essa appartenenti è irrilevante ai fini dei procedimenti di calcolo connessi con il problema in esame. La conoscenza della classe N ha il vantaggio di permettere di trascurare ovunque fin dall'inizio i termini appartenenti a questa classe. Supponiamo che la classe N sia un gruppo additivo di funzioni $\nu(\xi)$ definite per ogni elemento ξ di un dominio dato Δ (Δ insieme astratto arbitrario non vuoto) ed aventi i loro valori in un fissato gruppo additivo (in particolare il corpo complesso). Sia verificata la seguente proprietà: se una funzione $\nu(\xi)$ del gruppo N assume per ogni elemento ξ di Δ uno stesso valore γ, allora γ è uguale a zero. Un gruppo additivo N che soddisfa a questa condizione, viene chiamato *neutrice*; Δ è detto *dominio della neutrice* e le funzioni $\nu(\xi)$ che appartengono a N si dicono *trascurabili in* N. Se Δ è un insieme illimitato di uno spazio metrico, le funzioni $\nu(\xi)$ a valori complessi che tendono a zero per $\xi \to \infty$, formano una neutrice che è conveniente chiamare l'*infinito* (e indicare con il simbolo ∞) e, quando potessero esservi equivoci, l'*infinito relativo al dominio* Δ.

L'idea fondamentale del calcolo delle neutrici, così come avviene nella analisi classica relativamente al simbolo ∞, consiste nell'introdurre appropriate notazioni che contengano le neutrici di cui si fa uso. Se $f(\xi)$ designa una funzione definita per ogni elemento ξ di Δ che può scriversi nella forma $\gamma + \nu(\xi)$, con γ costante e con le $\nu(\xi)$ trascurabili in N, allora la costante γ è definita univocamente; questa costante viene designata con il simbolo $f(N)$ e si chiama il valore neutralizzato della funzione f in N. L'analisi che deriva da questa convenzione è più generale dell'analisi classica ed obbedisce a regole simili a quelle che conosciamo. In questo articolo verranno dati alcuni cenni di questa nuova analisi, di cui la più completa esposizione, fra quelle finora date, è quella pubblicata con il titolo *Neutrici* dall'Istituto Matematico « Guido Castelnuovo » dell'Università degli Studi di Roma a cura di G. di Blasio e L. Mereu (1964–65).

A causa della semplicità delle due idee sulle quali si fonda la nuova analisi non si deve credere che i risultati che si possono ottenere per mezzo di

(*) Nella seduta del 9 gennaio 1965.

neutrici possano essere trovati altrettanto facilmente senza di esse. La nuova analisi permette di ottenere facilmente, nel dominio delle matematiche classiche, risultati che sono praticamente introvabili senza le neutrici.

Per calcolare un integrale della forma:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

spesso si divide l'intervallo d'integrazione $(a\,,\,b)$ in due intervalli parziali per mezzo di un punto ξ e si scrive

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

di modo che è sufficiente calcolare i due integrali a secondo membro. Nel calcolo delle neutrici questo procedimento non si usa quasi mai; si procede invece al modo seguente: si considera un intervallo Δ contenuto in $(a\,,\,b)$, si fa uso della (1) dove ξ designa un punto qualunque di Δ e si introduce una neutrice N di dominio Δ in modo tale che il primo integrale a secondo membro della (1) possa scriversi nella forma:

$$\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma^* + \nu(\xi)\,, \tag{2}$$

dove γ^* è una costante e $\nu(\xi)$ è una funzione appartenente a N. Per la regola data precedentemente, si può trascurare il termine $\nu(\xi)$, ma allora occorre sostituire a primo membro della (2) la lettera ξ con il simbolo N, si ottiene così:

$$\int_a^{\mathrm{N}} f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma^*. \tag{3}$$

In tal modo si vede che l'integrale figurante nella (2) possiede in N il valore neutralizzato γ^*. Si può dimostrare che in tal caso anche il secondo integrale figurante a secondo membro della (1) possiede in N un valore neutralizzato γ^{**}, di modo che si ottiene:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma^* + \gamma^{**}, \tag{4}$$

oppure, ciò che è lo stesso:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\mathrm{N}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{N}}^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{5}$$

In questa nuova analisi non si fa uso di integrali come quello figurante nella (2), ma soltanto dei loro valori neutralizzati che, in generale, sono molto più semplici, poiché in tal modo si trascurano le funzioni $\nu(\xi)$ di una neutrice, che sono quasi sempre complicate.

Questa idea può esprimersi in un altro modo. Nella matematica ordinaria la lettera ξ che figura nella (1) designa un punto fissato, che diremo rigido, mentre nel calcolo delle neutrici essa rappresenta un punto variabile nel dominio Δ; questo fatto si esprime dicendo che la variabile ξ è *vibrante*. Nel calcolo delle neutrici si introducono sempre delle quantità vibranti che sono neutralizzate con delle neutrici. Le formule (1) e (2) che contengono una quantità vibrante ξ si chiamano *formule vibranti*, mentre ad esempio le formule (3), (4) e (5) sono relazioni rigide; le relazioni (3) e (5),c che contengono almeno una neutrice, si dicono *relazioni neutralizzate*.

Lo scopo del calcolo delle neutrici è di trovare delle relazioni rigide per mezzo di formule vibranti. Come esempio consideriamo l'integrale doppio:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy ,$$

dove

$$f(x, y) = x^{s-1} y^{t-1} (1-x)^{\sigma} (1-y)^{\tau} (1+\omega xy)^{w} , \tag{6}$$

con $|\omega| > 1$ e $-\pi < \arg \omega < \pi$. Nell'analisi ordinaria si deve supporre che le parti reali di $s, t, \sigma + 1$ e $\tau + 1$ sono positive, perché altrimenti l'integrale doppio non avrebbe senso. Nel calcolo delle neutrici, però, ci si rifiuta di escludere 15 dei 16 casi possibili. Si procede invece al modo seguente: si introducono quattro intervalli, precisamente

$$\Delta_1 : 0 < \xi_1 < a_1 \quad ; \quad \Delta_2 : 0 < \xi_2 < a_2 \quad ; \quad \Delta_3 : a_3 < \xi_3 < 1 \quad ; \quad \Delta_4 : a_4 < \xi_4 < 1 ,$$

dove a_1 e a_2 sono interni all'intervallo $(0, |\omega|^{-1})$ e dove a_3 e a_4 sono interni all'intervallo $(|\omega|^{-1/2}, 1)$. Si introduce una neutrice (N_1, N_2, N_3, N_4) la cui variabile $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ descrive il prodotto cartesiano $(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)$ dei quattro intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ in modo tale che l'integrale doppio:

$$\int_{\xi_3}^{\xi_4} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, y) \, dx \, dy \tag{7}$$

designi una funzione di $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ che può scriversi nella forma: $\gamma + \nu(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, dove γ è costante e $\nu(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ è trascurabile in (N_1, N_2, N_3, N_4). L'integrale (7) possiede allora in questa neutrice il valore neutralizzato γ che viene designato col simbolo:

$$\int_{N_3}^{N_4} \int_{N_1}^{N_2} f(x, y) \, dx \, dy . \tag{8}$$

La neutrice (N_1, N_2, N_3, N_4) è scelta in modo tale che questo valore neutralizzato è uguale all'integrale (6) nel caso particolare in cui le parti reali di $s, t, \sigma + 1$ e $\tau + 1$ sono positive.

Gran parte della teoria delle funzioni di una variabile complessa si basa su un importante principio espresso dal teorema d'integrazione di Cauchy, secondo il quale l'integrale di una funzione analitica esteso ad una curva chiusa è, sotto certe condizioni, uguale a zero e sotto altre condizioni, più generali, alla somma dei residui relativi a certi punti di singolarità. Lo scopo del calcolo delle neutrici è di porre a fianco di ogni principio importante dell'analisi ordinaria un principio analogo, più generale, appartenente all'analisi vibrante. Parallelamente al principio di Cauchy precendentemente formulato si ha nell'analisi vibrante il fenomeno analogo che, sotto certe condizioni, un integrale neutralizzato, semplice o multiplo, è uguale a zero e sotto altre condizioni più generali è uguale alla somma dei residui relativi a certi punti di singolarità. Ad esempio, se Δ_5 è un intervallo interno a $(|\omega|^{-1/2}; \alpha_3)$ e se Δ_6 è un intervallo interno a $(|\omega|^{-1/2}, \alpha_4)$, è possibile trovare una neutrice $(N_1, \cdots, N_6)$ la cui variabile $(\xi_1, \cdots, \xi_6)$ descrive il prodotto cartesiano $(\Delta_1, \cdots, \Delta_6)$ dei sei intervalli $\Delta_1, \cdots, \Delta_6$ in modo che l'integrale:

$$\int_{\xi_2}^{\xi_6}\int_{\xi_1}^{\xi_5} f(x, y)\, dx\, dy,$$

con $\xi_2 \in \Delta_2$; $\xi_3 \in \Delta_3$; $\xi_1 \in \Delta_1$; $\xi_5 \in \Delta_5$, designi una funzione trascurabile. Si ha allora

$$\int_{N_2}^{N_6}\int_{N_1}^{N_5} f(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{9}$$

D'altra parte nel calcolo dell'integrale:

$$\int_{N_6}^{N_4}\int_{N_1}^{N_5} f(x, y)\, dx\, dy \tag{10}$$

si presenta una singolarità. Nelle vicinanze di un punto situato sulla curva $xy = |\omega|^{-1}$ la funzione $f(x, y)$ possiede a sinistra di questo punto uno sviluppo secondo le potenze crescenti di x, a destra di questo punto uno sviluppo secondo le potenze decrescenti di x. Inoltre nelle vicinanze del segmento $0 < x < 1$; $y = 1$, lo sviluppo di $(1 - y)^\tau$ secondo le potenze di y converge molto lentamente. Queste due circostanze hanno come conseguenza che il punto d'intersezione $\alpha = (|\omega|^{-1}, 1)$ delle due curve $xy = |\omega|^{-1}$ e $y = 1$ è un punto di singolarità che fornisce un contributo $r_\alpha(f)$, residuo della funzione f nel punto α. Il punto α è il solo punto di singolarità che si presenta in questo caso, di modo che l'integrale (10) è uguale al residuo $r_\alpha(f)$.

Le regole del calcolo della teoria delle neutrici forniscono per $r_\alpha(f)$ la seguente espressione

$$r_\alpha(f) = \frac{\tau!}{(-t-1)!} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \binom{\sigma}{h} \frac{(s+h-1)!\,(-s-w-h-1)!\,(t-s-h-1)!}{(t-s+\tau-h)!}\, \omega^{-s-h}$$

nel caso in cui ogni termine della serie abbia un valore finito. Per questa ragione dobbiamo supporre che nessuno dei quattro numeri $s, t, \sigma+1$, $\tau+1$ sia un intero negativo o nullo e che le parti immaginarie dei numeri $s+w$, $-t-w$ e $s-t$ sono tutte e tre positive o tutte e tre negative.

Considerazioni di simmetria mostrano che l'integrale

$$\int_{N_2}^{N_4}\int_{N_5}^{N_3} f(x, y)\, dx\, dy$$

possiede una singolarità nel punto $\beta = (1, |\omega|)$ e che questo integrale è uguale al residuo $r_\beta(f)$ che è dato da:

$$r_\beta(f) = \frac{\sigma!}{(-s-1)!} \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \binom{\tau}{h} \frac{(t+h-1)!\,(-t-w-h-1)!\,(s-t-h-1)!}{(s-t+\sigma-h)!}\, \omega^{-t-h}.$$

Infine l'integrale

$$\int_{N_6}^{N_4}\int_{N_5}^{N_3} f(x, y)\, dx\, dy$$

possiede il punto singolare $\gamma = (1, 1)$, per la presenza dei fattori $(1-x)^\sigma$ e $(1-y)^\tau$, ed è dato da

$$r_\gamma(f) = \sigma!\,\tau! \sum_{h=0}^{\infty} \binom{w}{h} \frac{(s+w-h-1)!\,(t+w-h-1)!}{(s+w+\sigma-h)!\,(t+w+\tau-h)!}\, \omega^{w-h}.$$

L'integrale (6) è quindi uguale alla somma dei tre residui $r_\alpha(f) + r_\beta(f) + r_\gamma(f)$. Si trova in tal modo per questo integrale uno sviluppo convergente per $|\omega| > 1$, che è nello stesso tempo asintoticamente convergente per valori elevati di $|\omega|$.