
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LUIGI MERLI

Una nuova classe di polinomi di approssimazione

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.2, p. 162–165.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_162_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi numerica. — *Una nuova classe di polinomi di approssimazione.* Nota di LUIGI MERLI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

1. Il classico teorema di Weierstrass sulla approssimazione delle funzioni continue mediante opportune successioni di polinomi, può essere ottenuto seguendo più vie, da quella che fa uso dei polinomi trigonometrici di approssimazione, a quella che sfrutta i polinomi di Stieltjes ⁽¹⁾. Altre classi di polinomi di approssimazione si ottengono con i polinomi di Bernstein ⁽²⁾ che, senza essere interpolanti, richiedono la sola conoscenza della $f(x)$ in una particolare infinità numerabile di punti anziché in tutto l'intervallo di approssimazione, come invece avviene nei casi prima ricordati.

Un'altra classe di polinomi con i quali si ottiene il teorema di Weierstrass è offerta dai polinomi d'interpolazione di Hermite. Questi sono dati dalla formula

$$(1) \quad H_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) h_k^{(n)}(x),$$

dove

$$(2) \quad h_k^{(n)}(x) = v_k^{(n)}(x) [l_k^{(n)}(x)]^2,$$

con

$$(3) \quad v_k(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)}(x - x_k)$$

e

$$(4) \quad l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)},$$

$$(5) \quad \omega_n(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n), \quad c \neq 0,$$

ed assumono nei punti fondamentali $x_1, x_2, \dots, x_n$ dell'intervallo $(-1, 1)$, rispettivamente i valori $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ed hanno in tali punti derivata nulla ⁽³⁾.

Con tali polinomi, che hanno grado $\leq 2n - 1$, quando si scelgano come punti di interpolazione gli zeri dei polinomi di Iacobi, $I_n(\alpha, \beta, x)$, con $-1 < \alpha < 0, -1 < \beta < 0$, qualunque sia la $f(x)$ continua si ha

$$(6_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) = f(x)$$

e ciò uniformemente in $[-1, 1]$, mentre per $\alpha > 0, \beta > 0$ la (6₁) non ha luogo ⁽⁴⁾.

(*) Nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) Cfr. G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte seconda, Bologna (1951), pp. 493 sgg.

(2) Cfr. nota ⁽¹⁾, p. 495.

(3) Cfr. lav. cit. in ⁽¹⁾, p. 492.

(4) Cfr. G. SZEGÓ, *Orthogonal polynomials*, New York (1959), pp. 327 sg.

È noto infine che per i polinomi di interpolazione di Lagrange sussiste il classico fenomeno di Faber–Bernstein cioè l'impossibilità di approssimare con essi qualunque funzione continua ⁽⁵⁾.

Il diverso comportamento dei polinomi di Lagrange rispetto a quelli di Hermite sta nel fatto che, sempre per n punti fondamentali, mentre i primi sono di grado $\leq n - 1$, i secondi sono di grado $\leq 2n - 1$. L'innalzamento del grado permette di realizzare la convergenza ma, al tempo stesso, il procedimento di approssimazione diviene più complicato. Sono stati comunque escogitati alcuni metodi con i quali si ottengono polinomi di approssimazione convergenti ma nei quali si è cercato di mitigare il necessario appesantimento dovuto all'innalzamento del grado ⁽⁶⁾. Anche nella *spline interpolation* ci si preoccupa, fra l'altro, dell'abbassamento del grado ⁽⁷⁾.

Scopo di questa Nota è di far vedere come per certe assegnate successioni di punti fondamentali per i quali non si ha la convergenza della formula di Hermite, sia ancora possibile ottenere dei polinomi di approssimazione con grado minore di quelli di Hermite e che, senza essere interpolanti, sono però costruttivi per la $f(x)$ essendo basati sulla sola conoscenza di essa in tali punti fondamentali.

Dimosteremo infatti il teorema:

Siano $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+p}$, con $p \geq 0$ fissato, $n + p$ punti dell'intervallo $(-1, 1)$, con $-1 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_{n+p} < 1$, e siano $x_1, x_2, \dots, x_n$, n punti dello stesso intervallo con $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$, per i quali supponiamo che

nel relativo polinomio di Hermite $H_n(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k) h_k^{(n)}(x)$, risulti $h_k^{(n)}(x) > 0$ ⁽⁸⁾, per $k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$; $x \in [-1, 1]$ e si abbia inoltre, uniformemente in $[-1, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(x) = f(x)$, qualunque sia la $f(x)$ continua.

Supponiamo inoltre che, scelto un $\varepsilon > 0$ e arbitrario, esista un n_0 tale che, per $n > n_0$, risulti $|x_k - \bar{x}_{k+s}| < \varepsilon$, $s = 0, 1, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, n$. Posto allora

$$(7) \quad H_n^*(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f(\bar{x}_k) + f(\bar{x}_{k+1}) + \dots + f(\bar{x}_{k+p})}{p+1} h_k^{(n)}(x),$$

si ha

$$(71) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_n^*(x) = f(x)$$

e ciò uniformemente in $[-1, 1]$, qualunque sia $f(x)$ continua.

(5) Cfr. lav. cit. in (1), p. 491.

(6) Cfr. G. GRÜNWARD, *On the theory of interpolation*, «Acta Mathematica», 75, 219–245 (1953).

(7) J. H. AHLBEAG and E. N. NILSON, *Convergence properties of the spline fit*, «J. Soc. Appl. Math.», II (1), 95–104 (1963).

(8) Soddissano, per esempio, a questa condizione i polinomi costruiti negli zeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ di Tchebycheff di prima specie.

I polinomi $H_n^*(x)$ forniscono così una *nuova classe* di polinomi approssimanti e la convergenza è realizzata con polinomi di grado $\leq 2n - 1$, mentre i punti dati sono $n + p$.

2. Per la dimostrazione del teorema enunciato, ricordiamo, in primo luogo, che si ha

$$(8) \quad \sum_{k=1}^n h_k^{(n)}(x) \equiv 1,$$

qualunque sia n ed identicamente per $x \in [-1, 1]$ ⁽⁹⁾, e che pertanto, essendo $\sum_{k=1}^n f(x) h_k^{(n)}(x) \equiv f(x)$, per l'ipotesi della convergenza di $H_n(x)$ verso $f(x)$, si ha:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [f(x) - f(x_k)] h_k^{(n)}(x) = 0,$$

uniformemente in $[-1, 1]$.

Tenuto conto della (7) e della (8) si ha anche:

$$\begin{aligned} f(x) - H_n^*(x) &= \sum_{k=1}^n \left[f(x) - \frac{f(\bar{x}_k) + f(\bar{x}_{k+1}) + \dots + f(\bar{x}_{k+p})}{p+1} \right] h_k^{(n)}(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x) - f(x_k)] h_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \left[f(x_k) - \frac{f(\bar{x}_k) + f(\bar{x}_{k+1}) + \dots + f(\bar{x}_{k+p})}{h+1} \right] h_k^{(n)}(x) : \\ &= \sum_{k=1}^n [f(x) - f(x_k)] h_k^{(n)}(x) + \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{s=0}^p [f(x_k) - f(\bar{x}_{k+s})] \right\} h_k^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, per l'uniforme continuità della $f(x)$ in $(-1, 1)$, scelto $\sigma > 0$ si può determinare corrispondentemente un $\varepsilon > 0$ tale che per $|u - v| < \varepsilon$, $u, v \in [-1, 1]$, risulti $|f(u) - f(v)| < \sigma$.

Determiniamo allora un n_0 in modo che per $n > n_0$ risulti, come supposto nell'enunciato del teorema,

$$|x_k - \bar{x}_{k+s}| < \varepsilon, \quad s = 0, 1, \dots, p; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Tenuto conto che per ipotesi è $h_k^{(n)}(x) > 0$, per $k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$; $x \in [-1, 1]$, si avrà, sempre in base alla (8),

$$|f(x) - H_n^*(x)| \leq \left| \sum_{k=1}^n [f(x) - f(x_k)] h_k^{(n)}(x) \right| + \sigma.$$

Ma σ è arbitrario e quindi, in base alla (9), ne segue il teorema.

(9) Cfr. lav. cit in (1), p. 490.

3. Per esempio, nell'ipotesi che i punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n+p}$ siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di seconda specie, che è il polinomio $I_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x\right)$, la formula di Hermite per quanto detto precedentemente non *sempre converge*. Se invece $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie, che è il polinomio $I_n\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, x\right)$, la formula di Hermite converge in ogni caso e risulta in essa, per

$$x \in [-1, 1] \quad , \quad h_k^{(n)}(x) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad n = 1, 2, \dots$$

Ricordando che è $\bar{x}_k = \cos \frac{k\pi}{k+p+1}$, $k = 1, 2, \dots, n+p$, ed $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n}\pi$, $k = 1, 2, \dots, n$, si ha

$$|\bar{x}_{k+s} - x_k| = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

per $s = 0, 1, \dots, p$; $k = 1, 2, \dots, n$.

Sono quindi soddisfatte le condizioni del teorema enunciato e pertanto, per tutte le funzioni $f(x)$ continue in $[-1, 1]$, si ha uniformemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n^*(x) = f(x)$$

e gli $H_n^*(x)$, come abbiamo detto, sono costruiti con la sola conoscenza della $f(x)$ negli zeri del polinomio di Tchebycheff di seconda specie.

4. Si osservi che per $p = 0$ si ha un semplice slittamento dei valori della $f(x)$ dai punti $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ sui punti $x_1, x_2, \dots, x_n$.