Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Scarpini

Sul calcolo degli autovalori relativi ad una equazione differenziale inerente ad un problema di conduzione del calore. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 155–161.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_155_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi numerica. — *Sul calcolo degli autovalori relativi ad una equazione differenziale inerente ad un problema di conduzione del calore* (*). Nota II di FRANCESCO SCARPINI, presentata (**) dal Corrisp. G. FICHERA.

3. Diamo ora un metodo che consente di calcolare valori approssimanti per difetto il primo autovalore λ_1.

L'idea di tale metodo risale a Barta [1], che lo ha applicato nel caso particolare delle vibrazioni di una membrana. Successivamente esso è stato esteso ad altri problemi da diversi Autori. Non mi risulta però che sia stato applicato ad equazioni differenziali singolari, quale quella in studio.

Premettiamo il seguente teorema:

VII. – *Se $w_1(x)$ è una autosoluzione dell'operatore* T, *relativa al più grande autovalore, la $w_1(x)$ è di segno costante in $0 < x < 1$, cioè ivi sempre positiva oppure negativa.*

Dimostriamo dapprima che $w_1(x)$ non cambia segno in I. Detto μ_1 il più grande autovalore di T, si ha

$$\mu_1 = \max_{\mathcal{L}^{(2)}(\mathrm{I})} \frac{\int_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}} k(x,\xi)\, w(x)\, w(\xi)\, dx\, d\xi}{\int_{\mathrm{I}} |w(x)|^2\, dx} = \frac{\int_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}} k(x,\xi)\, w_1(x)\, w_1(\xi)\, dx\, d\xi}{\int_{\mathrm{I}} |w_1(x)|^2\, dx}.$$

Se la funzione $w_1(x)$ potesse cambiare segno in I, essendo $k(x,\xi) > 0$ allo interno di $\mathrm{I}\times\mathrm{I}$, si avrebbe

$$\mu_1 < \frac{\int_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}} k(x,\xi)\, |w_1(x)|\, |w_1(\xi)|\, dx\, d\xi}{\int_{\mathrm{I}} |w_1(x)|^2\, dx},$$

il che è assurdo.

Ricordiamo che, per la (2) si ha:

$$w_1(x) = \lambda_1 \left[x^{7/2} \int_0^x \gamma(\xi)\, \xi^{7/2}\, w_1(\xi)\, d\xi + x^{7/2}\, \gamma(x) \int_x^1 \xi^{7/2}\, w_1(\xi)\, d\xi \right].$$

(*) La numerazione dei paragrafi, delle formule e dei teoremi prosegue quella della Nota I dallo stesso titolo.

(**) Nella seduta del 9 gennaio 1965.

Dato che $\gamma(x) > 0$ per $x > 0$, se fosse $w_1(x_0) = 0$, $0 < x_0 < 1$, visto che $w_1(x)$ non cambia segno in I, dovrebbe aversi:

$$\int_0^{x_0} \gamma(\xi)\, \xi^{7/2} w_1(\xi)\, d\xi = 0 \quad , \quad \int_{x_0}^{1} \xi^{7/2} w_1(\xi)\, d\xi = 0.$$

Pòsto $u_1(x) = x^{-7/2} w_1(x)$, per la (3) si avrebbe:

$$u_1(x_0) = x_0^{-7/2} w_1(x_0) = 0,$$

$$\left[\frac{du_1}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{1 - x_0^7} \int_{x_0}^{1} \mathrm{E} u_1\, d\xi = -\frac{\lambda_1}{1 - x_0^7} \int_{x_0}^{1} \xi^{7/2} w_1(\xi)\, d\xi = 0,$$

e quindi $u_1(x)$, come soluzione della (1), nulla in x_0 assieme alla sua derivata, sarebbe identicamente nulla in I.

Si consideri ora la classe V delle funzioni $u(x)$ soddisfacenti le condizioni: I); II') $u(0) \leq 0$; III); IV) e V) $\mathrm{E}u > 0$ nell'interno di I; ove le I); III); IV) sono le condizioni considerate a p. 3 della Nota I per definire la $\mathfrak{A}$. Sussiste il seguente teorema:

VIII. – *Detto λ_1 il più piccolo autovalore dell'equazione* (1) *si ha:*

$$\inf_{0<x<1} -\frac{\mathrm{E}u}{x^7 u} \leq \lambda_1 \quad , \quad u(x) \in V.$$

Indichiamo con $u_1(x)$ un'autosoluzione di (1) corrispondente all'autovalore λ_1 e supponiamo $u_1(x) < 0$ all'interno di I. Pòsto $\mathrm{E}u = v$, $\mathrm{E}u_1 = v_1$, poiché la funzione $u(x) - u(0)$ è contenuta in $\mathfrak{A}$, in virtù di (5) abbiamo

$$-\frac{\mathrm{E}u}{x^7 u} = \frac{v(x)}{x^7 \left[\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi - u(0)\right]}, \text{ (1)} \qquad 0 < x < 1,$$

da cui

$$(13) \qquad -\frac{\mathrm{E}u}{x^7 u} - \lambda_1 = \frac{v(x) \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi)\, v_1(\xi)\, d\xi - v_1(x) \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi + u(0)\, v_1(x)}{x^7 \left[\int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi)\, v(\xi)\, d\xi - u(0)\right] \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi)\, v_1(\xi)\, d\xi},$$

essendo

$$\lambda_1 = \frac{v_1(x)}{x^7 \int_0^1 \mathcal{G}(x,\xi)\, v_1(\xi)\, d\xi}.$$

(1) Si osservi che per la II') e V) il denominatore di questa frazione è positivo in $0 < x < 1$.

L'integrale esteso ad I del numeratore a secondo membro di (13), per la simmetria di $\mathcal{G}(x, \xi)$, risulta uguale a

$$u(0) \int_0^1 v_1(x)\, dx.$$

Esso ha valore non positivo, come si constata, tenendo conto di II') e del fatto che $v_1(x) = -\lambda_1 x^7 u_1(x) > 0$ nell'interno di I. Pertanto il numeratore del secondo membro della (13) avrà estremo inferiore in I non positivo.

Il denominatore a secondo membro di (13) è positivo in $0 < x < 1$ in forza del teorema precedente e della già osservata positività di

$$-u(x) = \int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi - u(0).$$

Ne risulta che l'estremo inferiore della frazione a secondo membro di (13) è non positivo e da qui l'asserto.

4. Si sono conseguiti valori approssimati per eccesso dei primi sette autovalori di (1) in $\mathfrak{A}$, con il metodo di Rayleigh–Ritz, (cfr. teor. VI), adoperando il sistema di funzioni $\{\varphi_p\}$, $(p = 1, 2, \cdots)$, con $\varphi_p \equiv x^p$. Calcolate le radici $\Lambda_p^{(7)}$ $(p = 1, 2, \cdots, 7)$ dell'equazione di settimo grado

$$\det.\,((a_{hk} - \Lambda\, b_{hk})) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, 7),$$

con

$$a_{hk} = \int_0^1 (1 - x^7) \frac{d\varphi_h}{dx} \frac{d\varphi_k}{dx}\, dx = \frac{7\, hk}{(h+k-1)(h+k+6)},$$

$$b_{hk} = \int_0^1 x^7\, \varphi_h\, \varphi_k\, dx = \frac{1}{h+k+8},$$

si sono ottenute le limitazioni

$$\lambda_p \leq \Lambda_p^{(7)}, \qquad (p = 1, 2, \cdots, 7).$$

Per conseguire invece i primi tre valori approssimati per difetto $\lambda_p^{(7)}$ $(p = 1, 2, 3)$ si è fatto uso di un metodo di calcolo dovuto al prof. Fichera [(2)], limitandone l'applicazione a due casi particolari.

(2) Il metodo è stato illustrato, nella sua generalità, assieme a diverse applicazioni numeriche, in una conferenza, dal titolo « Sul calcolo degli autovalori », tenuta dal prof. Fichera il 30 settembre 1964 all'Università di Cagliari durante i lavori del Simposio Matematico annesso alla XLVIII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze (Cagliari–Sassari, 28 settembre – 4 ottobre 1964).

Introdotto l'*invariante ortogonale* dell'operatore T

$$\mathfrak{J}_s^{(n)}(\mathrm{T}) = \frac{1}{s!} \int\limits_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}\times\cdots\times\mathrm{I}} \begin{vmatrix} k^{(n)}(x_1, x_1) \cdots k^{(n)}(x_1, x_s) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k^{(n)}(x_s, x_1) \cdots k^{(n)}(x_s, x_s) \end{vmatrix} dx_1 \cdots dx_s ,$$

ove $k^{(n)}(x, \xi)$ (nucleo dell'operatore T^n), è l'iterato n.simo del nucleo $k(x, \xi)$ la formula data dal prof. Fichera, per la limitazione inferiore degli autovalori λ_k nel caso del problema in studio, è la seguente:

$$\lambda_k \geq \left[\frac{\mathfrak{J}_s^{(n)}(\mathrm{T}) - \sum\limits_{h_1 < \cdots < h_s}^{1,m} \tilde{\mu}_{h_1}^n \cdots \tilde{\mu}_{h_s}^n}{\sum\limits_{h_1 < \cdots < h_{s-1}}^{(k)\,1,m} \tilde{\mu}_{h_1}^n \cdots \tilde{\mu}_{h_{s-1}}^n} + \tilde{\mu}_k^n \right]^{-\frac{1}{n}} . \tag{14}$$

In questa: deve assumersi $\tilde{\mu}_k = \frac{1}{\Lambda_k^{(m)}}$; le somme Σ sono estese alle combinazioni semplici di classe s degli indici $1, \cdots, m$, laddove con $\Sigma^{(k)}$ s'intende che la somma è estesa a tutte le combinazioni semplici di classe $s - 1$ dei numeri $1, \cdots, k - 1, k + 1, \cdots, m$. Nel caso $s = 1$ al posto della sommatoria a denominatore deve leggersi 1.

I casi particolari considerati sono relativi agli invarianti $\mathfrak{J}_1^{(1)}$ ed $\mathfrak{J}_1^{(2)}$. Il calcolo del primo si è conseguito con integrazione elementare. Si è così ottenuto il seguente valore approssimato per eccesso a meno di 10^{-8}.

$$\mathfrak{J}_1^{(1)} < 0{,}12818683.$$

Delineiamo qui il procedimento seguito per il calcolo di un valore in eccesso dell'invariante $\mathfrak{J}_1^{(2)}$.

Detto A il triangolo $0 \leq \xi \leq x \leq 1$ si ha, causa la simmetria del nucleo $k(x, \xi)$ per $(x, \xi) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I}$:

$$\mathfrak{J}_1^{(2)} = 2 \int\limits_{\mathrm{A}} x^7 \gamma^2(\xi)\, \xi^7 \, dx \, d\xi.$$

Visto che la funzione integranda è continua in $\mathrm{A} - \partial\mathrm{A}$ e sommabile in A e la funzione

$$\frac{1}{8}(1 - x^8)\, \gamma^2(\xi)\, \xi^7$$

è continua in $\partial\mathrm{A}$, si è fatto ricorso al teorema di Green ottenendo

$$\mathfrak{J}_1^{(2)} = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 \xi^7 (1 - \xi^8)\, \gamma^2(\xi)\, d\xi .$$

Valori approssimati di questo integrale si sono conseguiti con il « metodo del rettangolo ». Infatti si ha

$$\mathfrak{I}_1^{(2)} < \frac{1}{4n}\left\{\sum_{h=1}^{n-1}\left[1-\left(\frac{h-1}{n}\right)^8\right]\left(\frac{h}{n}\right)^7\gamma^2\left(\frac{h}{n}\right)+\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^8\right]\left(\frac{n-1}{n}\right)^7\gamma^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\},$$

$$\mathfrak{I}_1^{(2)} > \frac{1}{4n}\left\{\sum_{h=1}^{n-1}\left[1-\left(\frac{h}{n}\right)^8\right]\left(\frac{h-1}{n}\right)^7\gamma^2\left(\frac{h-1}{n}\right)\right\}.$$

Il calcolo effettuato con l'ausilio di un calcolatore I.B.M. 7040 ha fornito i seguenti valori per $n = 10000$

$$0{,}013161647 < \mathfrak{I}_1^{(2)} < 0{,}013197089. \tag{15}$$

Per applicare il metodo esposto nel paragrafo 3 (metodo di Barta) si sono impiegate le funzioni del tipo seguente:

$$\sum_{m=1}^{n} c_m \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}(-1)^{k+1}\frac{x^{7k+1}}{7k+1}. \tag{16}$$

Si è assunto $n = 4$ e sono state considerate funzioni corrispondenti a diversi valori delle costanti c_m.

I risultati numerici ottenuti con i vari metodi impiegati in queste Note e quelli in precedenza proposti da altri Autori, sono raccolti nelle tabelle che seguono:

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
Latzko (1921) . . .	8,712	164,36	1700,40	→	
Durfee (1956) . . .	8,72747	152,423	435,06	855,68	1414,1
Fettis (1957	8,72798	152,8	462,5		
Caligo (1962)	$8{,}7275 < \lambda_1 < 8{,}7448$				
Caligo-Cotugno (1964)	$8{,}72752 < \lambda_1 < 8{,}72759$				

Valutazioni approssimate, degli autovalori della (1), *per difetto ed eccesso calcolate con il metodo di Rayleigh-Ritz e con l'uso della formula* (14).

($s = 1$, $n = 1$. $\mathfrak{I}_1^{(1)} < 0{,}12818683$)

$\lambda_p'^{(7)}$	λ_p	$\Lambda_p^{(7)}$	Errore relativo
8,41797	λ_1	8,72748	0,035463
92,8356	λ_2	152,462	0,39109
157,104	λ_3	464,577	0,66184

Valutazioni approssimate, degli autovalori della (1), *per difetto ed eccesso, calcolate con il metodo di Rayleigh–Ritz e con l'uso della formula* (14).

$(s = 1 , n = 2. \ \mathfrak{I}_1^{(2)} < 0{,}013197089)$

$\lambda_p^{\prime\prime(7)}$	λ_p	$\Lambda_p^{(7)}$	Errore relativo
8,72072	λ_1	8,72748	0,00077308
125,645	λ_2	152,462	0,17589
200,175	λ_3	464,577	0,56913

Valutazioni del primo autovalore di (1) *calcolate col metodo di Barta.*

c_1	c_2	c_3	c_4	λ_1'
1	— 0,145	— 0,06	— 0,01	8,57214
1	— 0,145	— 0,065	— 0,01	8,57410
1	— 0,145	— 0,063	— 0,01	8,58156

I valori per difetto forniti da Caligo [3] e da Caligo–Cotugno [4] sono, come si è osservato nell'introduzione, alla Nota I, errati. Questi Autori pervengono ai valori per difetto di λ_1 con il classico procedimento fondato sul calcolo degli integrali:

$$t_n = \int_{I \times I} | k^{(n)} (x , \xi) |^2 \, dx \, dy .$$

Purtroppo i valori per eccesso da loro forniti per t_2 e t_3 sono erronei. Infatti deve essere:

$$t_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-4} \quad , \quad t_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-6}$$

e quindi

$$t_2 > \lambda_1^{-4} > \eta^{-4} \quad \text{e} \quad t_3 > \lambda_1^{-6} > \eta^{-6} ,$$

essendo η il numero considerato nella introduzione. Ora, secondo gli Autori citati, si avrebbe

$$t_2 < 0{,}000172360 \quad , \quad t_3 < 0{,}00000226285 ,$$

mentre riesce:

$$\eta^{-4} = 0{,}0001723663879 \quad , \quad \eta^{-6} = 0{,}00000226292098 .$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. BARTA, *Sur la vibration fondamentale d'une membrane*, «C. R.», *204*, 472–473 (1937).

[2] T. BOGGIO, *Sull'equazione del moto vibratorio delle membrane elastiche*, «Atti Acc. Naz. Lincei», ser. V, vol. XVI, 386–393 (1907).

[3] D. CALIGO, *Calcolo del minimo autovalore relativo ad una equazione della conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XXXII, 1–7 (1962).

[4] D. CALIGO–N. COTUGNO, *Un calcolo di autovalori per una particolare equazione differenziale del secondo ordine*, Quad. n. 4, «Notiziario I.N.A.C.», 640, Roma, 15–36 (1964).

[5] WM. H. DURFEE, *Heat–Flow in a Fluid with Eddying Flow* (*Readers Forum*), «Jour. of the Aeronautical (Aero–Spaces) Sciences», *23* (1956).

[6] H. E. FETTIS, *On the eigenvalue Latzko's differential equation*, «Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.», *37*, 398–399 (1957).

[7] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Roma (1963), vol. I, 219–249; 478–482; 354–355.

[8] G. FICHERA, *Operatori di Riesz–Fredholm, Operatori riducibili etc.* «Corso di Analisi sup.», 1963–64, Istituto Matematico, Università di Roma (1964), 111–128; 169–206.

[9] G. FICHERA–M. PICONE, *Calcolo per difetto del più basso autovalore di un operatore ellittico del secondo ordine*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XXX, 411–418 (1961).

[10] J. HERSCH, *Un principe de maximum pour la fréquence fondamentale d'une membrane* «C. R.», *249*, 1074–1076 (1959).

[11] H. LATZKO, *Der Wärmeübergang an einen turbulenten Flussigkeits oder gasstrom*, «Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.», I, 268–290 (1921).

[12] M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli (1940).

[13] M. H. PROTTER, *Lower bounds for the first eigenvalue of elliptic equations and related topics*, Tech. Rep. n. 8, Univ. California (1958).

[14] G. SANSONE, *Sugli autovalori relativi ad una equazione della conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza*, «Ann. di Mat. pura e appl.», ser. IV, vol. LIII, 5–8 (1961).

[15] E. TREFFTZ, *Über Fehlerschätzung bei Berechnung von Eigenwerten*, Mathematische Annalen, Band *108*, *Heft 4* (1933).