Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Benedetto Pettineo

Sulla dimensione minima degli autoinsiemi delle equazioni di seconda specie negli spazi di Hilbert

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 150–154.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_150_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulla dimensione minima degli autoinsiemi delle equazioni di seconda specie negli spazi di Hilbert* [(*)]. Nota di BENEDETTO PETTINEO, presentata [(**)] dal Socio M. PICONE.

Sia S uno spazio lineare di Hilbert complesso, completo e separabile [(1)], e sia G (u) una trasformazione definita in S, quivi lineare e continua ed avente codominio G (S) contenuto in S. Si denoti con G* la trasformazione aggiunta di G e si considerino le due equazioni (l'una aggiunta dell'altra)

$$u - \lambda G(u) = f \qquad (f \in S), \tag{1}$$

$$v - \bar{\lambda} G^*(v) = g \qquad (g \in S) \tag{2}$$

(con λ parametro complesso). Sia Λ il piano della variabile complessa λ.

In una Nota precedente [(2)] ho detto che *l'equazione* (1) *è di seconda specie in un punto* λ *quando si verificano le due circostanze seguenti:*

α) *uno almeno degli autoinsiemi* $U(\lambda)$ *e* $V(\bar{\lambda})$ *rispettivamente della* (1) *e della* (2) *abbia dimensione finita;*

β) *per l'equazione* (1) *valga il teorema dell'alternativa nella classica formulazione: condizione necessaria e sufficiente affinché la* (1) *ammetta soluzione è che il termine noto* f *sia ortogonale all'autoinsieme* $V(\bar{\lambda})$ *della* (2).

Ho detto pure che la (1) è di seconda specie in un insieme $A \subset \Lambda$ quando è di seconda specie in ogni punto di A. (Ed allora la (2) risulta di seconda specie nell'insieme $\bar{A}$ costituito dai coniugati dei numeri di A).

Ho poscia definito *l'indice* $J(\lambda)$ *dell'equazione* (1) in ogni punto λ in cui l'equazione è di seconda specie; precisamente, se $\nu(\lambda)$ e $\mu(\bar{\lambda})$ sono rispettivamente le dimensioni degli autoinsiemi $U(\lambda)$ e $V(\bar{\lambda})$ della (1) e della (2), ho posto

$$J(\lambda) = \nu(\lambda) - \mu(\bar{\lambda}), \tag{3}$$

convenendo che sia $J(\lambda) = +\infty$ ovvero $J(\lambda) = -\infty$ quando è infinita la dimensione $\nu(\lambda)$ ovvero è infinita la dimensione $\mu(\bar{\lambda})$. Dopo di che, ho stabilito il seguente *teorema d'invarianza dell'indice:*

I) *L'insieme* A^0 *dei punti di* Λ *in cui l'equazione* (1) *è di seconda specie è costituito da un numero finito o da un'infinità numerabile di campi* A^0_n *(a due*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) Per la terminologia ed i richiami cfr.: G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Libreria Veschi, Roma 1962; F. RIESZ e B. SZ.-NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Acad. des Sc. de Hongrie, Budapest 1955.

(2) B. PETTINEO, *Sull'invarianza dell'indice delle equazioni di seconda specie negli spazi di Hilbert*, « Rend. Accad. Lincei », vol. XXXVIII (1965), fasc. 1.

a due senza punti in comune) [3] *in ciascuno dei quali l'indice dell'equazione si mantiene costante.*

Nella presente Nota dimosterò il seguente *teorema della dimensione minima degli autoinsiemi:*

II) *In ogni campo* A_n^0 *(in cui l'indice della* (1) *è costante), ad eccezione al più dei punti di un insieme* N_n^0 *finito o numerabile, le dimensioni* $\nu(\lambda)$ *e* $\mu(\bar{\lambda})$ *rispettivamente degli autoinsiemi* $U(\lambda)$ *e* $V(\bar{\lambda})$ *delle* (1) *e* (2) *si mantengono costanti. L'insieme* N_n^0 *non ha punti d'accumulazione in* A_n^0*; inoltre in ogni punto* λ' *di* N_n^0 *le dimensioni* $\nu(\lambda')$ *e* $\mu(\bar{\lambda}')$ *sono maggiori (quando sono finite) delle rispettive dimensioni (minime)* $\nu(\lambda)$ *e* $\mu(\bar{\lambda})$ *che si mantengono costanti al variare di* λ *in* $A_n^0 - N_n^0$ [4].

* * *

Sia λ_0 un punto di A_n^0 e, per fissare le idee, si abbia

$$(4) \qquad 0 \leq \mu(\bar{\lambda}_0) \leq \nu(\lambda_0) \leq +\infty \quad , \quad \mu(\bar{\lambda}_0) < +\infty .$$

Riprendendo le considerazioni della Nota precedente [2], si denotino con S_0 e con Σ_0 le varietà degli elementi di S ortogonali rispettivamente agli autoinsiemi $U(\lambda_0)$ e $V(\bar{\lambda}_0)$ e si consideri la trasformazione $R(f)$ che ad ogni elemento $f \in \Sigma_0$ fa corrispondere la soluzione $u' \in S_0$ dell'equazione

$$(5) \qquad u - \lambda_0 G(u) = f .$$

Si denotino con $P(u)$, $Q(u)$ e $Q'(u)$ rispettivamente le proiezioni di u sulle varietà $U(\lambda_0)$, S_0 e Σ_0 e si osservi che i prodotti

$$(6) \qquad T_1 = RQ' \quad , \quad T = T_1 G$$

sono trasformazioni definite in S e quivi lineari e continue.

Siano (quando esistono)

$$(7) \qquad \{u_h\}\ (h = 1, \cdots, \nu(\lambda_0)) \quad \text{e} \quad \{v_k\}\ (k = 1, \cdots, \mu(\bar{\lambda}_0))$$

due sistemi ortonormali e completi di autosoluzioni rispettivamente della (5) e dell'equazione aggiunta

$$(8) \qquad v - \bar{\lambda}_0 G^*(v) = g .$$

Esiste un numero $\varepsilon > 0$ tale che, comunque si assuma λ nell'intorno (aperto) $C(\lambda_0, \varepsilon)$ col centro in λ_0 ed il raggio ε:

$$(9) \qquad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon ,$$

(3) Il campo è un insieme aperto e connesso.

(4) Se il campo A_n^0 è quello che contiene il punto $\lambda = 0$, le dimensioni minime $\nu(\lambda)$ e $\mu(\bar{\lambda})$ sono costantemente nulle (perché, ovviamente, $\nu(0) = \mu(0) = 0$); in particolare, se A_n^0 coincide con l'intero piano Λ, si ritrova la nota circostanza delle teoria fredholmiana: che l'insieme N_n^0 (degli autovalori della (1), ciascuno di rango finito) non ha punti d'accumulazione.

la soluzione più generale dell'equazione (1) è data dalla formula

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathrm{T}^n \left(\sum_{h=1}^{\nu(\lambda_0)} \tau_h u_h + \mathrm{T}_1(f) \right) \qquad (f \in \mathrm{S}), \tag{10}$$

dove le variabili complesse τ_h verificano (quando $\nu(\lambda_0) = +\infty$) la condizione di convergenza

$$\sum_h |\tau_h|^2 < +\infty \tag{11}$$

ed inoltre verificano le $\mu(\bar{\lambda}_0)$ condizioni lineari

$$\sum_{h=1}^{\nu(\lambda_0)} (u_h, w_k)\tau_h + (f, v_k^0) = 0 \qquad (k = 1, \cdots, \mu(\bar{\lambda}_0)), \tag{12}$$

avendo posto

$$w_k = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)^{n+1} \mathrm{T}^{*n} \mathrm{G}^*(v_k), \tag{13}$$

$$v_k^0 = v_k + \mathrm{T}_1^*(w_k). \tag{14}$$

Si consideri la matrice del sistema (12)

$$\{(u_h, w_k)\} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, \cdots, \nu(\lambda_0) \\ k = 1, \cdots, \mu(\bar{\lambda}_0) \end{pmatrix} \tag{15}$$

avente $\mu(\bar{\lambda}_0)$ righe (in numero finito) e $\nu(\lambda_0)$ colonne (in numero finito o no). Si consideri quindi un qualunque minore Δ della matrice (15)

$$\Delta = \begin{vmatrix} (u_{h_1}, w_{k_1}), \cdots, (u_{h_r}, w_{k_1}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (u_{h_1}, w_{k_r}), \cdots, (u_{h_r}, w_{k_r}) \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Considerato che

$$(u_h, w_k) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n+1} (\mathrm{GT}^n(u_h), v_k) \tag{17}$$

e posto

$$\Delta_{n_1 \cdots n_r} = \begin{vmatrix} (\mathrm{GT}^{n_1}(u_{h_1}), v_{k_1}), \cdots, (\mathrm{GT}^{n_1}(u_{h_r}), v_{k_1}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (\mathrm{GT}^{n_r}(u_{h_1}), v_{k_r}), \cdots, (\mathrm{GT}^{n_r}(u_{h_r}), v_{k_r}) \end{vmatrix}, \tag{18}$$

mostrerò che per il determinante Δ è valido il seguente sviluppo in serie r^{pla}

$$\Delta = \sum_{n_1, \cdots, n_r = 0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n_1 + \cdots + n_r + r} \Delta_{n_1 \cdots n_r}. \tag{19}$$

Mostrerò anzi che la serie dei moduli

$$\sum_{n_1, \cdots, n_r = 0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^{n_1 + \cdots + n_r + r} |\Delta_{n_1 \cdots n_r}| \tag{20}$$

è totalmente convergente in un cerchio col centro nel punto λ_0.

Se M è un numero maggiore dei moduli di G e di T, si ha

$$\| T^n (u) \| \leq M^n \| u \| \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{21}$$

e quindi, ricordando che u_h e v_k sono normali,

$$| (GT^n (u_h), v_k) | \leq \| GT^n (u_h) \| \cdot \| v_k \| \leq M^{n+1}. \tag{22}$$

Per conseguenza

$$| \Delta_{n_1 \cdots n_r} | \leq r! \, M^{n_1 + \cdots + n_r + r} \tag{23}$$

e quindi, ricordando la (9),

$$\sum_{n_1, \cdots, n_r = 0}^{\infty} | \lambda - \lambda_0 |^{n_1 + \cdots + n_r + r} | \Delta_{n_1 \cdots n_r} | \leq \tag{24}$$

$$\leq r! \sum_{n_1, \cdots, n_r = 0}^{\infty} (\varepsilon M)^{n_1 + \cdots + n_r + r} = r! \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon M)^{n+1} \right\}^r .$$

Pertanto basterà per esempio che sia

$$\varepsilon < \frac{1}{2M}, \tag{25}$$

perché la (20) risulti totalmente convergente nell'intorno C (λ_0, ε). Anzi risulterà pure convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} | \lambda - \lambda_0 |^{n+r} | \Delta_n |, \tag{26}$$

dove si è posto

$$\Delta_n = \sum_{n_1 + \cdots + n_r = n} \Delta_{n_1 \cdots n_r}. \tag{27}$$

Dopo di che dalla (19) seguirà senz'altro

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n+r} \Delta_n \tag{28}$$

con la totale convergenza della serie nell'intorno C (λ_0, ε).

Ciò premesso e supposto senz'altro che si abbia

$$\lambda \neq \lambda_0, \tag{29}$$

se il determinante Δ non è nullo, tra i termini Δ_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ nello sviluppo (28) ne esiste almeno uno non nullo; sia Δ_ϱ il primo tra questi. In ogni caso, sia Δ_ϱ il primo (quando esiste) tra i numeri Δ_n non nulli dello sviluppo (28) (anche se, eventualmente, il determinante Δ è nullo). Si consideri allora la classe $\{\Delta\}$ costituita dai minori Δ estratti dalla matrice (15), nulli e non nulli, per ciascuno dei quali vi è almeno un termine Δ_n non nullo nello sviluppo (28) e, corrispondentemente, si consideri la classe $\{\Delta_\varrho\}$. Sia p l'ordine massimo dei determinanti della classe $\{\Delta\}$. Ovviamente *ogni minore d'ordine maggiore di* p *estratto dalla matrice* (15) *è nullo* [5].

Sia Δ' un determinante d'ordine p (massimo) della classe $\{\Delta\}$. Si ha

$$(30) \qquad \Delta' = (\lambda - \lambda_0)^{\varrho+p} \{ \Delta'_\varrho + (\lambda - \lambda_0) \Delta'_{\varrho+1} + (\lambda - \lambda_0)^2 \Delta'_{\varrho+2} + \cdots \}$$
$$(\text{con } \Delta'_\varrho \neq 0).$$

Perciò, considerato che $\Delta'_\varrho \neq 0$, rimpicciolendo (se occorre) il numero ε, si può affermare che per ogni λ ($\neq \lambda_0$) che verifichi la (9) risulta

$$(31) \qquad \Delta' \neq 0$$

(mentre, come si è osservato, ogni minore della matrice (15) d'ordine maggiore di p è nullo). Ma allora, come si è visto nella Nota precedente [2], si ha (rimpicciolendo ancora, se occorre, il numero ε)

$$(32) \qquad \nu(\lambda) = \nu(\lambda_0) - p \quad , \quad \mu(\bar{\lambda}) = \mu(\bar{\lambda}_0) - p \,.$$

Concludendo: comunque si assuma $\lambda_0 \in A_n^0$, esiste un intorno aperto $C(\lambda_0, \varepsilon)$ di λ_0 tale che per ogni λ ($\neq \lambda_0$) di tale intorno le dimensioni $\nu(\lambda)$ e $\mu(\bar{\lambda})$ degli autoinsiemi $U(\lambda)$ e $V(\bar{\lambda})$ delle (1) e (2) si mantengono costantemente eguali a $\nu(\lambda_0) - p$ ed a $\mu(\bar{\lambda}_0) - p$ rispettivamente. Tra gli intorni $C(\lambda_0, \varepsilon)$ (aperti) c'è *l'intorno massimo* $C(\lambda_0, \varepsilon_0)$, cioè quello (eventualmente coincidente con l'intero piano Λ) di raggio ε_0 massimo. Ed è chiaro che se due intorni $C(\lambda_0, \varepsilon_0)$ e $C(\lambda'_0, \varepsilon'_0)$ hanno una regione in comune, le dimensioni (minime) $\nu(\lambda)$ e $\mu(\bar{\lambda})$ si mantengono costanti al variare di λ nell'insieme somma

$$C(\lambda_0, \varepsilon_0) + C(\lambda'_0, \varepsilon'_0),$$

ad eccezione al più dei centri λ_0 e λ'_0 (dove può accadere che le dette dimensioni aumentino).

Ne consegue che in tutto il campo A_n^0, salvo nei punti di un insieme N_n^0 (che può anche mancare), le dimensioni $\nu(\lambda)$ e $\mu(\bar{\lambda})$ si mantengono costanti; e tali dimensioni sono le minime in A_n^0 giacché risulta, per ogni $\lambda' \in N_n^0$,

$$(33) \qquad \nu(\lambda') \geq \nu(\lambda) \quad , \quad \mu(\bar{\lambda}') \geq \mu(\bar{\lambda}) \ ^{(6)}.$$

L'insieme N_n^0 non ha punti d'accumulazione nel campo A_n^0, può averne tutt'al più sulla frontiera di A_n^0 (quando questa frontiera c'è); in ogni caso N_n^0 è un insieme finito o numerabile.

(5) Non è escluso che per ogni minore Δ estratto dalla matrice (15) si abbia sempre $\Delta_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$); in tal caso è $p = 0$. Si noti pure che p è, in ogni caso, indipendente da λ ($\neq \lambda_0$).

(6) Per esempio: può accadere che $\nu(\lambda')$ coincida con $\nu(\lambda)$, ma solo quando $\nu(\lambda') = \nu(\lambda) = +\infty$, nel qual caso $\mu(\bar{\lambda}')$ (finito) è però maggiore di $\mu(\bar{\lambda})$.