Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Scorza Dragoni

A proposito di un teorema di rotocontrazione per gli autoomeomorfismi della corona circolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 142–144.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_142_0>

Matematica. — *A proposito di un teorema di rotocontrazione per gli autoomeomorfismi della corona circolare.* Nota [*] del Corrisp. GIUSEPPE SCORZA DRAGONI.

In questa Nota espongo i risultati di una Memoria ultimata da pochi giorni nell'ambito dell'attività dell'Istituto nazionale di alta matematica e dedicata a quegli autoomeomorfismi di una corona circolare, che non ammettono punti uniti e che applicano le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa.

Per questi autoomeomorfismi, in quella Memoria [1], fornirò una notevole precisazione di un mio risultato recente. E per quelli che non hanno punti uniti nemmeno nei rispettivi quadrati, e che per di più soddisfanno, insieme coi loro inversi, ed in una certa metrica, ad una condizione lipschitziana opportuna, giungerò ad un risultato forse definitivo.

1. Parliamo prima, nella corona, degli autoomeomorfismi che non ammettono punti uniti e che applicano le due circonferenze estreme ciascuna su se stessa.

Secondo quella precisazione, *in ogni tal autoomeomorfismo t è sempre presente, nella corona, almeno una curva semplice ed aperta, c, che unisca le due circonferenze estreme della corona e che sia libera rispetto a t (cioè, che sia priva di punti in comune con la propria immagine in t); oppure almeno una curva semplice e chiusa, z, che aggiri il centro della corona e che, se non è libera essa stessa rispetto a t, si possa spezzare in due archi siffatti, che uno di essi, u, sia privo di punti in comune con la propria immagine in t ed abbia un diametro minore di un numero positivo prefissato, e che l'altro, v, sia privo di punti in comune con la propria immagine in t e non incontri nemmeno l'immagine, in t, od in t^{-1}, di tutta la curva z.* In quest'ultimo sottocaso, la curva semplice e chiusa dipenderà eventualmente dalla scelta di quel numero positivo; e quel diametro potrà essere calcolato nella metrica euclidea.

A chiarimento di questo enunciato, avvertiamo esplicitamente come nell'ultimo sottocaso non si possa dire che la curva z separa l'arco $t(v)$ dal l'arco $t^{-1}(v)$, a meno di non ritrovarsi addirittura nel sottocaso precedente. Nel fatto, una tal separazione implicherebbe la $(u+v) \cap t(v) = \emptyset$ e la $(u+v) \cap t^{-1}(v) = \emptyset$; cioè, una tal separazione, accanto alla $v \cap t(v) = \emptyset$, equivalente alla $v \cap t^{-1}(v) = \emptyset$, implicherebbe la $u \cap t(v) = \emptyset$ e la $u \cap t^{-1}(v) = \emptyset$, e di qui, attesa naturalmente anche la $u \cap t(u) = \emptyset$, seguirebbe appunto $z \cap t(z) = \emptyset$.

(*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) Che comparirà negli «Annali di matematica pura ed applicata».

2. Parliamo ora, nella corona circolare, di quel tal risultato forse definitivo.

Allo scopo, nel piano della corona si fissi un sistema di coordinate polari, assumendo il centro della corona come polo, l'angolo giro come unità di misura per gli angoli, il raggio della corona come unità di misura per i segmenti. E se P′ e P″ sono punti della corona, con i moduli rispettivi η' ed η'', lo *scarto* fra P′ e P″,

$$\| \mathrm{P}' \, \mathrm{P}'' \| ,$$

sia dato dal minimo dei valori assunti dalla radice quadrata

$$\sqrt{(\xi' - \xi'')^2 + (\eta' - \eta'')^2}$$

al variare di ξ' fra gli argomenti di P′ e di ξ'' fra quelli di P″, la determinazione della radice quadrata essendo ovviamente quella non negativa (come quella della successiva radice quadrata del numero tre). Questo scarto, assunto a distanza, definirà la *metrica polare* nella corona.

Rispetto alla metrica polare, il solito autoomeomorfismo t è *bilateralmente lipschitziano* secondo il coefficiente k, k essendo una costante reale, se risulta

$$\frac{1}{k} \| \mathrm{P}' \, \mathrm{P}'' \| \leq \| t(\mathrm{P}') \, t(\mathrm{P}'') \| \leq k \| \mathrm{P}' \, \mathrm{P}'' \| ,$$

qualunque siano i punti P′ e P″ tratti dalla corona circolare; cioè, se risulta

$$\| t(\mathrm{P}') \, t(\mathrm{P}'') \| \leq k \| \mathrm{P}' \, \mathrm{P}'' \| ,$$
$$\| t^{-1}(\mathrm{P}') \, t^{-1}(\mathrm{P}'') \| \leq k \| \mathrm{P}' \, \mathrm{P}'' \| ,$$

per ogni scelta dei punti P′ e P″ nella corona circolare. Ebbene, *se il solito autoomeomorfismo t applica le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa, è privo di punti uniti, insieme col suo quadrato, ed è bilateralmente lipschitziano, rispetto alla metrica polare, secondo un coefficiente k soddisfacente alla* $k^{-2} + k^{-3} > 2/\sqrt{3}$, *esso ammette come libera, nella corona, almeno una curva semplice ed aperta, c, che unisca le due circonferenze estreme della corona, oppure almeno una curva semplice e chiusa, z, che aggiri il centro della corona.* Nel primo caso, i due campi individuati nella corona da c e $t(c)$ si possono interpretare, diciamo, come *campi di rotazione* per l'autoomeomorfismo indotto da t sulla ricovrente semplicemente connessa della corona circolare; nel secondo caso il campo individuato da z e $t(z)$ si può interpretare come un *campo di contrazione* per l'autoomeomorfismo assegnato o per il suo inverso. Si tratta di considerazioni ovvie, sulle quali non è il caso di insistere. Piuttosto desidero osservare un'altra cosa. Il vincolo rappresentato dalla $k^{-2} + k^{-3} > 2/\sqrt{3}$, che è soddisfatta per $k = 6/5$ e che implica per esempio la $k < 5/4$, è imposto dalla costruzione dimostrativa. E può darsi che basti cambiare questa, per attenuare quello. Ma sarebbe certamente più interessante vedere cosa significhi, per t, essere topologicamente equivalente ad un autoomeomorfismo che (applichi le due circonferenze estreme della corona ciascuna su se stessa e che) sia bilateralmente lipschitziano, secondo un coefficiente k vincolato alla $k^{-2} + k^{-3} > 2/\sqrt{3}$.

3. L'ipotesi che il quadrato di t sia privo di punti uniti impedisce di applicare il risultato del n. 2 alle rotazioni della corona circolare (attorno al proprio centro e nel proprio piano), se l'angolo della rotazione è piatto! E sarebbe veramente sgradevole se anche il teorema del n. 1 non permettesse di ritrovare che quegli autoomeomorfismi della corona circolare C, che sono privi di punti uniti, che applicano le due circonferenze estreme di C ciascuna su se stessa, e che hanno come quadrato l'identità, sono topologicamente equivalenti a rotazioni di C, con un'ampiezza, per l'angolo della rotazione, uguale a quella degli angoli piatti (2). Ma fortunatamente non è così.

Supponiamo, nel fatto, che l'autoomeomorfismo t di C sia privo di punti uniti, applichi le due circonferenze estreme di C ciascuna su se stessa, ed abbia come quadrato l'identità. E mostriamo intanto la presenza, in C, di una curva semplice ed aperta, c, che unisca le due circonferenze estreme di C e che sia libera rispetto a t.

Nel vero, se una tal curva c mancasse, in C sarebbero presenti le due curve semplici ed aperte u e v, con gli estremi, e gli estremi soltanto, in comune, libere rispetto a t e siffatte, che la curva semplice e chiusa $u+v$, diciamòla di nuovo z, aggiri il centro della corona e non incontri $t(v)$, oppure $t^{-1}(v)$. E previo un eventuale scambio di uffici fra t e t^{-1}, non sarebbe restrittivo supporre vuota l'intersezione di z e $t(v)$. Allora $t(v)$ o sarebbe contenuta nell'interno della regione Z contornata da z, o sarebbe contenuta nell'esterno di Z. E $t(u)$ non soltanto non avrebbe punti su u, ma non potrebbe averne nemmeno su v (perché t porterebbe gli eventuali punti comuni a $t(u)$ e v in punti di u, cioè di z, ed in punti di $t(v)$, cioè in punti che non apparterrebbero a z). Indi z sarebbe libera nella t. E $t(z)$, aggirando anch'essa il centro di C, separerebbe z da $t^2(z)$, che invece coincide con z. Cosa assurda.

La presenza della curva semplice ed aperta c, libera rispetto a t, è dimostrata. Ed alla curva c si può imporre di avere soltanto gli estremi in comune con le due circonferenze estreme di C, uno sulla minore e l'altro sulla maggiore.

Le due regioni in cui C è divisa da c e $t(c)$ si possono porre in corrispondenza topologica con le due regioni in cui una corona circolare C′ è divisa da due raggi diametralmente opposti, una C_1, delle prime andando in una, C'_1, delle seconde, e l'altra, C_2, nell'altra, C'_2 (3). Anzi, atteso che il quadrato di t è l'identità, si può ottenere che il punto corrente P di C_1 ed il suo trasformato $t(P)$, che descrive C_2, siano rispettivamente associati a punti di C'_1 e C'_2 diametralmente opposti. Donde la conclusione desiderata.

(2) La circostanza è praticamente nota. Si vegga, per esempio, L. E. J. BROUWER, *Über die periodischen Transformationen der Kugel* [«Mathematische Annalen», vol. 80 (1921), pagg. 39-41].

(3) Si vegga, per esempio, B. V. KEREKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie* [Springer, Berlino, 1923], cap. 2, § 2.