Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie con la variabile indipendente complessa. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.2, p. 127–141.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_2_127_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 13 febbraio 1965

Presiede il Presidente BENIAMINO SEGRE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie con la variabile indipendente complessa.* Nota I [*] del Socio MAURO PICONE.

La Nota presente fa seguito a quella [1], che sarà qui citata con la notazione (N), nella quale ho dato un nuovo assetto formale alla teoria dei sistemi normali di equazioni differenziali lineari, ordinarie, con la variabile indipendente reale. Nella presente un simile assetto consegue la detta teoria, supposta la variabile indipendente complessa. Indicata con $z = x + iy$ tale variabile, di parte reale x e di coefficiente y dell'immaginario, siano assegnati:

un campo A (insieme di punti aperto e connesso) del piano complesso z;
una matrice quadrata

$$a(z) \equiv \left(\left(a_{hk}(z)\right)\right),$$

d'ordine p, i cui elementi

$$a_{hk}(z) \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, p)$$

(*) Presentata nella seduta del 13 febbraio 1965.

(1) Dal titolo: *Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie, con la variabile indipendente reale.* Questi « Rendiconti », vol. XXXVIII della Serie VIII, fasc. 1 (Gennaio, 1965).

sono funzioni della variabile complessa z, olomorfe in A, cioè sia essa, come brevemente dirò, *olomorfa in* A; un vettore, a p componenti,

$$f(z),$$

olomorfo in A, cioè, a componenti

$$f_1(z), f_2(z), \cdots, f_p(z),$$

funzioni di z, ivi olomorfe. Nella Nota presente mi propongo la ricerca di un vettore

$$u(z),$$

a p componenti

$$u_1(z), u_2(z), \cdots, u_p(z),$$

esso pure olomorfo in A, verificante ivi il sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie:

$$\frac{du}{dz} + au = f. \tag{1}$$

1. **Il campo d'integrazione è semplicemente connesso.** – Fissato il punto zero del piano complesso z in un punto di A, per ogni numero naturale q considero il quadrato $R^{(q)}$ del piano z, luogo dei punti per cui:

$$|x| \leqq 2^q \quad , \quad |y| \leqq 2^q$$

e i 2^{4q} quadrati

$$R^{(q)}_{hk}, \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, 2^{2q}),$$

ottenuti decomponendo il quadrato $R^{(q)}$ in quadrati di lato 2^{-q}.

Non appena q è tanto grande da risultare la diagonale dei quadrati $R^{(q)}_{hk}$ minore della distanza che il punto zero ha dalla frontiera di A, i quattro, fra quei quadrati, contenenti il punto zero sono tutti contenuti in A e indicheremo con $D^{(q)}$ il massimo dominio connesso, riunione di quadrati $R^{(q)}_{hk}$, contenente il punto zero e contenuto in A. Risulta

$$D^{(q)} \subset D^{(q+1)} \subset A,$$

e dico che, comunque si fissi il punto $\bar{z}$ di A, per q abbastanza grande, il punto $\bar{z}$ è contenuto in $D^{(q)}$. Detta, infatti, *coordinata* una poligonale del piano z, per la quale ciascun lato è parallelo ad uno degli assi coordinati, data la connessione di A, esistono di tali poligonali, contenute in A, aventi per punti terminali il punto zero e il punto $\bar{z}$. Indicata con Π una di queste poligonali, con $d(\Pi)$ la sua massima corda, con $d'(\Pi)$ la sua distanza dalla frontiera di A, non appena q è tanto grande da risultare

$$2^q > d(\Pi) \quad , \quad 2^{-q} < d'(\Pi),$$

il dominio $D^{(q)}$ conterrà la poligonale Π e quindi anche il punto $\bar{z}$.

Assunti, ad arbitraria, il numero naturale q e i punti z e ζ del dominio $D^{(q)}$, si considerino le serie [cfr. le serie (1.3) e (1.7) di (N)]

$$\delta + \int_z^\zeta a(s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_z^\zeta a^{(n)}(z, s)\, ds, \tag{1.1}$$

$$\delta + \int_z^\zeta a(s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_z^\zeta {}^{(n)}a(\zeta, s)\, ds, \tag{1.2}$$

ove

$$a^{(n+1)}(z, s) = \int_z^s a^{(n)}(z, t)\, dt \cdot a(s) \quad , \quad {}^{(n+1)}a(\zeta, s) = a(s) \cdot \int_s^\zeta {}^{(n)}a(\zeta, t)\, dt,$$

$$a^{(0)} \equiv {}^{(0)}a \equiv a, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

s, t, ζ indicano variabili complesse, ciascun integrale essendo esteso ad una poligonale coordinata di minima lunghezza, contenuta in $D^{(q)}$, avente per punti terminali quelli agli estremi dell'integrale, la lunghezza delle quali è certamente non superiore al numero $4 \cdot 2^{3q}$. I termini di tali serie sono matrici quadrate d'ordine p, ad elementi funzioni delle variabili complesse z e ζ, olomorfe nell'interno del dominio $D^{(q)} \times D^{(q)}$ e sussistono le formole di maggiorazione:

$$\left.\begin{array}{c} \left| \int_z^\zeta a^{(n)}(z, s)\, ds \right| \\ \left| \int_z^\zeta {}^{(n)}a(\zeta, s)\, ds \right| \end{array}\right\} \leq M(D^{(q)}) \frac{(4 \cdot 2^{3q})^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{1.3}$$

ove $M(D^{(q)})$ designa il massimo di $|a(z)|$ in $D^{(q)}$.

Le dette serie convergono dunque totalmente nel dominio $D^{(q)} \times D^{(q)}$. La somma, che indicheremo con

$$r(z, \zeta)$$

della serie (1.1) è pertanto una matrice quadrata d'ordine p, funzione del punto (z, ζ) olomorfa nell'interno del dominio $D^{(q)} \times D^{(q)}$. Essa vi verifica l'equazione integrale di Volterra:

$$r(z, \zeta) = \delta + \int_z^\zeta a(s)\, r(s, \zeta)\, ds, \text{ [2]} \tag{1.4}$$

(2) Con δ indico la matrice unità d'ordine p, per la quale

$$\delta_{hk} \begin{cases} = 0, & \text{per } h \neq k, \\ = 1, & \text{per } h = k, \end{cases} \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, p).$$

e quindi le equazioni

$$(1.5) \qquad \frac{\partial}{\partial z} r(z, \zeta) + a(z)\, r(z, \zeta) = 0\,, \qquad r(\zeta, \zeta) = \delta\,,$$

che la determinano nel dominio $D^{(q)} \times D^{(q)}$. La somma, che indicheremo con

$$r'(z, \zeta)$$

della serie (1.2), essa pure matrice quadrata d'ordine p, funzione del punto (z, ζ) olomorfa nell'interno del dominio $D^{(q)} \times D^{(q)}$, ivi verifica l'equazione integrale di Volterra:

$$(1.6) \qquad r'(z, \zeta) = \delta + \int_z^\zeta r'(z, s)\, a(s)\, ds$$

e quindi le equazioni

$$(1.7) \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} r'(z, \zeta) - r'(z, \zeta)\, a(\zeta) = 0\,, \qquad r'(z, z) = \delta\,,$$

che la determinano nel dominio $D^{(q)} \times D^{(q)}$. Con lo stesso ragionamento esposto al n. 1 di (N) si dimostra che sussiste l'identità:

$$r(z, \zeta) \equiv r'(z, \zeta).$$

Poiché, per il dominio $D^{(q+1)}$, si ritrova, in $D^{(q)}$, la matrice $r(z, \zeta) \equiv \equiv r'(z, \zeta)$, ivi già ottenuta, e, comunque si fissi il punto z di A, esso, al tendere di q all'infinito, è definitivamente contenuto in $D^{(q)}$, possiamo enunciare il teorema:

I. *Comunque si definisca, nel campo* A, *semplicemente connesso, del piano complesso* z, *una matrice quadrata* $a(z)$ *d'ordine* p, *olomorfa in* A, *esiste una matrice quadrata* $r(z, \zeta)$ *d'ordine* p, *olomorfa nel campo* $A \times A$, *verificante le equazioni* (1.4), (1.5), (1.6), (1.7). *Se, comunque si assumono i punti* z *e* ζ *in* A, *le matrici* $a(z)$ *e* $a(\zeta)$ *risultano sempre fra di loro permutabili, si ha:*

$$(1.8) \qquad r(z, \zeta) \equiv e^{\int_z^\zeta a(s)\, ds} \equiv \delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_z^\zeta a(s)\, ds \right)^n,$$

con la formola di maggiorazione (1.3) *dei termini della serie.*

Tale matrice $r(z, \zeta)$ si dirà la *matrice risolvente* dal sistema (1) e i teoremi IV, V e VI di (N) si possono enunciare senz'altro, sotto le ipotesi testè contemplate, per rappresentare l'integrale generale del sistema (1) che riesce olomorfo nel campo A, ove si sostituisca alle variabili reali x_0, x e ξ le variabili complesse z_0, z e ζ, intendendo le integrazioni effettuate lungo curve regolari (in particolare, poligonali coordinate) tracciate nel campo A, terminate ai punti estremi delle integrazioni stesse, assumendo arbitrariamente i vettori $\overset{\circ}{u}$ e $\varphi(z)$, a componenti complesse, quelle del secondo essendo funzioni di z, olomorfe in A.

In tali ipotesi, d'altra parte, il teorema d'esistenza, nel campo semplicemente connesso A, dell'integrale generale del sistema (1), olomorfo in A, è ben noto dagli elementi.

Conviene, per l'uso che ne faremo fra poco, enunciare esplicitamente il teorema:

II. *Nell'ipotesi del teorema precedente, comunque si assuma un sistema fondamentale* $v_i(z)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ *di soluzioni, olomorfe in* A, *del sistema omogeneo*

$$(1)_0 \qquad \frac{du}{dz} + a(z)\,u = 0\,,$$

esiste, uno ed un solo sistema fondamentale $w^{(i)}(z)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ *di soluzioni ivi olomorfe, del sistema:*

$$(1)_0^* \qquad \frac{du}{dz} - a^*(z)\,u = 0\,,$$

aggiunto al sistema $(1)_0$, *per il quale riesce, in* $A \times A$,

$$r_{hk}(z, \zeta) = \sum_{i=1}^{p} w_{ki}(\zeta)\, v_{ih}(z)\,,$$

avendo designata con $v_{i1}(z), v_{i2}(z), \cdots, v_{ip}(z)$ *le componenti del vettore* $v_i(z)$ *e con* $w_{1i}(z), w_{2i}(z), \cdots, w_{pi}(z)$ *quelle del vettore* $w^{(i)}(z)$.

2. **Caso particolare di una sola equazione differenziale d'ordine arbitrario.** – Assegnate, nel campo A semplicemente connesso, le $p + 2$ funzioni olomorfe

$$a_0(z)\,,\ a_1(z)\,, \cdots, a_p(z)\,, f(z)\,,$$

la funzione $u(z)$, essa pure olomorfa nel campo A, soluzione dell'equazione differenziale normale, ordinaria e lineare,

$$(2.1) \qquad \frac{d^{p+1} u}{dz^{p+1}} + \sum_{h=0}^{p} a_k(z) \frac{d^k u}{dz^k} = f(z)\,,$$

verificante, in un assegnato punto z_0 di A, le condizioni:

$$\left[\frac{d^i u}{dz^i}\right]_{z=z_0} = u_0^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, p)$$

è data anche dalla formola:

$$u(z) = \sum_{i=1}^{p} u_0^{(i)} \left[\frac{(z - z_0)^i}{i!} - \int_{z_0}^{z} \rho(z, \zeta) \sum_{k=0}^{i} a_k(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^{i-k}}{(i-k)!}\, d\zeta\right] + \int_{z_0}^{z} \rho(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta\,,$$

designando $\rho(z, \zeta)$ la *funzione risolvente* dell'equazione (2.1), funzione del punto (z, ζ) olomorfa nel campo $A \times A$, determinata come soluzione della equazione integrale di Volterra

$$\rho(z, \zeta) = \frac{(z-\zeta)^p}{p!} + \int_z^{\zeta} \rho(z, s) \sum_{k=0}^{p} a_k(s) \frac{(s-\zeta)^{p-k}}{(p-d)!} ds ,$$

e, come tale, somma della relativa serie di Neuman, le integrazioni essendo effettuate lungo arbitrarie curve regolari (in particolare, poligonali coordinate) tracciate nel campo A, terminate ai punti estremi delle integrazioni.

Tale funzione soddisfa, nel campo $A \times A$, le equazioni che si ottengono dalle (3.2), (3.3), (3.9), (3.13) di (N), sostituendovi le variabili reali x e ξ, rispettivamente, con le complesse z e ζ, e sussistono il teorema X e le formole (3.12) di (N), con le stesse sostituzioni.

3. **Il campo d'integrazione è più volte connesso.** – Il campo A sia m volte connesso e si abbia

$$A' \subset A \subset A'',$$

essendo A' e A'' campi entrambi semplicemente connessi, dotati delle proprietà seguenti. Nel campo A'' sono contenuti m continui

$$C_1, C_2, \cdots, C_m,$$

limitati, eventualmente riducentisi ad un sol punto, a due a due disgiunti, il campo A risultando l'intersezione del campo A'' col complementare dell'insieme chiuso riunione dei continui $C_1, C_2, \cdots, C_m$. Assunto, su ogni continua C_l $(l = 1, 2, \cdots, m)$ il punto $z^{(l)} = x^{(l)} + iy^{(l)}$ a coordinate minime, nell'ordine x, y, cioè il punto che ha la minima ordinata fra quelli che hanno la minima ascissa, sia $\bar{x}^{(l)}$ l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri reali ξ tali che il segmento rettilineo lungo dei punti per cui è

$$\xi < x < x^{(l)} \quad , \quad y = y^{(l)} ,$$

appartenga al campo A. Se è $\bar{x}^{(l)} > -\infty$, il punto $[\bar{x}^{(l)}, y^{(l)}]$ appartiene alla frontiera di A. Si consideri l'insieme T_l dei punti di A per i quali è

$$\bar{x}^{(l)} < x < x^{(l)} \quad , \quad y = y^{(l)} , \qquad (l = 1, 2, \cdots, m).$$

Ebbene, il campo A' è ottenuto da A, operando su di esso i *tagli*

$$T_1, T_2, \cdots, T_m,$$

asportandogli, cioè, i punti dell'insieme riunione degli insiemi $T_1, T_2, \cdots, T_m$.

I continui C_l $(l = 1, 2, \cdots, m)$ si diranno *lacune* del campo m volte connesso A.

Essendo, il campo A', semplicemente connesso, si può definire, in $A' \times A'$, la matrice risolvente $r(z, \zeta)$ del sistema (1), che vi riesce funzione olomorfa del punto (z, ζ) e sussiste il teorema:

III. *Comunque si fissino il punto* ζ *in* A′ *e il punto* $\overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{x} + i\overset{\circ}{y}$ $(\overset{\circ}{y} = y^{(l)})$ *sul taglio* T_l $(l = 1, 2, \cdots, m)$, *esistono, determinati e finiti, i quattro limiti*

$$\lim_{z \to \overset{\circ}{z}} r(z, \zeta) \quad , \quad \lim_{z \to \overset{\circ}{z}} \frac{\partial}{\partial x} r(z, \zeta) , \qquad \text{per} \quad y < \overset{\circ}{y} = y^{(l)} , \tag{3.1}$$

$$\lim_{z \to \overset{\circ}{z}} r(z, \zeta) \quad , \quad \lim_{z \to \overset{\circ}{z}} \frac{\partial}{\partial x} r(z, \zeta) , \qquad \text{per} \quad y > \overset{\circ}{y} = y^{(l)} , \tag{3.2}$$

ai quali si tende uniformemente al variare di $\overset{\circ}{z}$ *in ogni intervallo chiuso e finito del taglio. Indicati i limiti* (3.1), *rispettivamente, coi simboli*

$$r^{-}(\overset{\circ}{z}, \zeta) \quad , \quad s^{-}(\overset{\circ}{z}, \zeta) ,$$

e i limiti (3.2) *coi simboli*

$$r^{+}(\overset{\circ}{z}, \zeta) \quad , \quad s^{+}(\overset{\circ}{z}, \zeta) ,$$

le matrici

$$r^{-}(z, \zeta) \quad , \quad s^{-}(z, \zeta) \quad , \quad r^{+}(z, \zeta) \quad , \quad s^{+}(z, \zeta) ,$$

sono funzioni del punto (z, ζ), *continue in* $T_l \times A'$, *e, per ogni fissato punto* z *in* T_l, *funzioni di* ζ *olomorfe in* A′.

D i m o s t r a z i o n e . – Ciascun termine delle serie (1.1) e (1.2) verifica la tesi del teorema e se il quadrato $R^{(q)}$, già considerato, è intersecato dal taglio T_l, detto $D^{(q)}$ il massimo dominio connesso, riunione dei quadrati $R^{(q)}_{hk}$, contenente il punto zero e contenuto in A, si ha, in $D^{(q)}$, la convergenza totale delle dette serie e di quelle delle derivate parziali, rispetto alle variabili z e ζ, dei loro termini. Ma il dominio $D^{(q)}$ contiene un segmento del taglio T_l e questo segmento, al tendere di q all'infinito, invade tutto il taglio, donde la tesi.

Condizione, necessaria e sufficiente, affinché una soluzione $u(z)$ del sistema (1) sia olomorfa nel campo A è che essa lo sia nel campo A′, che, in ogni punto $\overset{\circ}{z} = \overset{\circ}{x} + i\overset{\circ}{y}$, di ciascun taglio T_l, esistano, determinati e finiti, entrambi i limiti

$$\lim_{z \to \overset{\circ}{z}} u(z) , \qquad \text{per} \quad y < \overset{\circ}{y} = y^{(l)} ,$$

$$\lim_{z \to \overset{\circ}{z}} u(z) , \qquad \text{per} \quad y > \overset{\circ}{y} = y^{(l)} ,$$

ed indicati, tali limii, rispettivamente, con le notazioni

$$u^{-}(\overset{\circ}{z}) \quad , \quad u^{+}(\overset{\circ}{z}) ,$$

entrambi i vettori $u^{-}(z)$ e $u^{+}(z)$ siano funzioni di z, continue su T_l $(l = 1, 2, \cdots, m)$ ed ivi coincidenti.

Fissato, ad arbitrio, un punto z_0 di A', tutte le soluzioni del sistema (1), olomorfe in A', sono ivi date [cfr. la (2.5) di (N)] dalla formola

$$u(z) = r(z, z_0)\mathring{u} + \int_{z_0}^{z} r(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \tag{3.3}$$

al variare del vettore arbitrario $\mathring{u}$, l'integrale essendo esteso, ad una poligonale coordinata arbitraria, tracciata in A', terminata ai punti z_0 e z, ed il problema consiste, pertanto, nella ricerca di un vettore $\mathring{u}$, tale che il vettore $u(z)$, dato dalla (3.3) risulti olomorfo in A, cioè si abbia, in forza delle considerazioni testè fatte, su ogni taglio T_l, *con la continuità dei vettori* $u^+(z)$ *e* $u^-(z)$, *l'identità*

$$u^+(z) - u^-(z) \equiv 0 \qquad (\text{per } l = 1, 2, \cdots, m). \tag{3.4}$$

Ora, in forza del teorema III, si ha, sul taglio T_l,

$$\left\{\begin{aligned} u^+(z) &= r^+(z, z_0)\mathring{u} + (\Pi^+)\int_{z_0}^{z} r^+(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \\ u^-(z) &= r^-(z, z_0)\mathring{u} + (\Pi^-)\int_{z_0}^{z} r^-(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \end{aligned}\right. \tag{3.5}$$

avendo designato, coi simboli

$$(\Pi^+)\int_{z_0}^{z}(\cdots)\, d\zeta \quad , \quad (\Pi^-)\int_{z_0}^{z}(\cdots)\, d\zeta,$$

integrali effettuati, rispettivamente, lungo poligonali coordinate Π^+, Π^-, congiungenti il punto z_0 col punto z, i cui punti, eccettuati il punto z, appartengono tutti al campo A', avendo i lati terminali contenenti il punto z, normali al taglio T_l, la prima, nel semipiano $y \geqq y^{(l)}$ e la seconda nel semipiano $y \leqq y^{(l)}$.

Dalle (3.5), a norma del teorema III, si deduce la continuità dei vettori $u^+(z)$ e $u^-(z)$ Si ha, d'altra parte, in A',

$$\frac{\partial}{\partial x} u(z) = \frac{\partial}{\partial x} r(z, z_0)\mathring{u} + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial}{\partial x} r(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta + f(z),$$

e pertanto, in virtù dello stesso teorema III, per ogni fissato punto $\mathring{z}$ del taglio T_l, l'esistenza dei limiti

$$\lim_{z \to \mathring{z}} \frac{\partial}{\partial x} u(z), \qquad \text{per} \quad y < \mathring{y} = y^{(l)},$$

$$\lim_{z \to \mathring{z}} \frac{\partial}{\partial x} u(z), \qquad \text{per} \quad y > \mathring{y} = y^{(l)},$$

determinati e finiti, ai quali si tende uniformemente, al variare di $\overset{\circ}{z}$ in ogni intervallo chiuso e finito del taglio. Ne segue che, per ogni punto $\overset{\circ}{z}$ del taglio T_l si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{z \to \overset{\circ}{z}} \dfrac{\partial}{\partial x} u(z) \text{ (per } y < \overset{\circ}{y}) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x} u^-(z)\right]_{z=\overset{\circ}{z}} \\ \lim\limits_{z \to \overset{\circ}{z}} \dfrac{\partial}{\partial x} u(z) \text{ (per } y > \overset{\circ}{y}) = \left[\dfrac{\partial}{\partial x} u^+(z)\right]_{z=\overset{\circ}{z}} \end{array}\right. \qquad (l = 1, 2, \cdots, m),$$

donde il teorema:

IV. *Sul taglio* T_l $(l = 1, 2, \cdots, m)$ *si ha la continuità dei vettori*

$$u^+(z) \quad , \quad u^-(z),$$

e l'identità

$$u^+(z) \equiv u^-(z),$$

se, per un particolare punto $z_l = x_l + iy_l = x_l + iy^{(l)}$, *comunque scelto sul taglio, risulta*

$$u^+(z_l) = u^-(z_l).$$

Dimostrazione. – In A′ sussiste l'identità $\mathrm{d}u/\mathrm{d}z + au \equiv f$, e quindi, in virtù di quanto precede, sul taglio T_l si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} u^+(z) + a(z)\, u^+(z) \equiv f(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u^-(z) + a(z)\, u^-(z) \equiv f(z),$$

e pertanto, la differenza $v(x) \equiv u^+(x + iy^{(l)}) - u^-(x + iy^{(l)})$, vi verifica il sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari ordinarie:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + a(x + iy^{(l)})\, v = 0$$

e la condizione:

$$v(x_l) = 0,$$

donde, come volevasi dimostrare,

$$v(x) \equiv u^+(x + iy^{(l)}) - u^-(x + iy^{(l)}) \equiv 0, \quad \text{per} \quad \overline{x}^{(l)} < x < x^{(l)}.$$

Ne segue, tenendo conto delle (3.5.), il teorema [3]:

V. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la soluzione* $u(z)$ *del sistema* (1), *verificante, nel punto* z_0 *di* A′, *la condizione:*

$$u(z_0) = \overset{\circ}{u}, \qquad (z_0 \in A')$$

(3) Cfr. C. BIRINDELLI, *Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili, in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso* [questi «Rendiconti», vol. XIV della Serie VIII (1953)].

sia olomorfa in A, *è che, scelto a piacere, sul taglio* T_l $(l = 1, 2, \cdots, m)$ *un particolare punto* $z_l = x_l + iy_l = x_l + iy^{(l)}$, *il vettore* $\mathring{u}$, *a* p *componenti, verifichi il seguente sistema di* mp *equazioni lineari algebriche:*

$$(3.6) \qquad [r^+(z_l, z_0) - r^-(z_l, z_0)]\,\mathring{u}$$

$$+ (\Pi^+)\int_{z_0}^{z_l} r^+(z_l, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta - (\Pi^-)\int_{z_0}^{z_l} r^-(z_l, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta = 0, \qquad (l = 1, 2, \cdots, m).$$

Secondo questo teorema, dunque, l'esistenza o meno di una soluzione del sistema (1), olomorfa nel campo A, dipende dalla compatibilità o meno del sistema (3.6), di mp equazioni lineari algebriche, nel vettore incognito $\mathring{u}$ a p componenti, e la varietà lineare di quelle soluzioni ha la dimensione di quella delle soluzioni del sistema stesso. Essa è percorsa dalla funzione $u(z)$, data dalla (3.3) nel mentre che $\mathring{u}$ percorre la varietà lineare delle soluzioni del sistema (3.6).

Mi limiterò ad enunciare i tre seguenti notevoli corollari del teorema V.

VI. *Se il numero* m *delle lacune del campo* A *è maggiore di uno, il sistema* (1) *è, in generale, privo di soluzioni olomorfe in* A.

VII. *Se il campo* A *presenta una sola lacuna, e il sistema omogeneo* $(1)_0$ *vi possiede lo zero come unica soluzione ivi olomorfa, il sistema* (1), *comunque si assuma un tale vettore* $f(z)$, *ha sempre una ed una sola soluzione olomorfa in* A.

Pertanto: se il continuo limitato C, *contenuto in* A″, *contiene tutte le lacune di* A *e soltanto lo zero è soluzione del sistema omogeneo* $(1)_0$ *olomorfa nel campo intersezione di* A″ *col complementare di* C, *non può esistere più di una soluzione del problema considerato.*

VIII. *Se la matrice risolvente* $r(z, \zeta)$ *del sistema* (1) *è funzione del punto* (z, ζ) *olomorfa nel campo* A×A, *in particolare, se la matrice* $a(z)$ *è olomorfa nel campo* A″, *condizione necessaria affinché il sistema* (1) *abbia soluzioni olomorfe in* A *è che, per ogni poligonale coordinata chiusa* Π, *tracciata iu* A, *si abbia:*

$$(3.7) \qquad \int_{\Pi} r(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Soddisfatta questa condizione, ogni soluzione del sistema (1) *è olomorfa in* A, *ed è data dalla* (3.3).

Questo teorema è, d'altronde, suscettibile della seguente dimostrazione diretta. Supposta la matrice risolvente $r(z, \zeta)$ olomorfa in A×A, se esiste una soluzione $u(z)$ del sistema (1), essa pure olomorfa su A, assunta, arbitrariamente, una curva regolare chiusa Γ, tracciata in A, dall'identità

$$\frac{du}{d\zeta} + a(\zeta)\, u(\zeta) \equiv f(\zeta),$$

si trae

$$\int_\Gamma r(z,\zeta)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta + \int_\Gamma r(z,\zeta)\,a(\zeta)\,u(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_\Gamma r(z,\zeta)\,f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

e, con un'integrazione per parti,

$$-\int_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial\zeta}r(z,\zeta) - r(z,\zeta)\,a(\zeta)\right]u(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_\Gamma r(z,\zeta)\,f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

donde, per la (1.7),

$$\int_\Gamma r(z,\zeta)\,f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0\,. \tag{3.8}$$

Se sussiste la (3.7), per ogni poligonale coordinata chiusa Π, tracciata in A, l'eguaglianza:

$$u(z) = r(z,z_0)\,\mathring{u} + (\Pi)\int_{z_0}^{z} r(z,\zeta)\,f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

avendo, col simbolo

$$(\Pi)\int_{z_0}^{z}(\cdots)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

designato un integrale effettuato lungo una poligonale coordinata Π, tracciata in A e terminata in punti z_0 e z, definisce, come subito si vede, un vettore olomorfo in A, soluzione del sistema (1) che, nel punto z_0, coincide col vettore $\mathring{u}$, arbitrariamente assegnato. Si ha dunque il teorema:

IX. *Se il sistema* (1) *è dotato di matrice risolvente* $r(z,\zeta)$, *olomorfa in* $\mathrm{A}\times\mathrm{A}$, *condizione necessaria affinché esso abbia soluzioni olomorfe in* A *è che, comunque vi si tracci una curva regolare chiusa* Γ, *sia verificata la* (3.8). *Condizione sufficiente è che sia verificata la* (3.7), *per ogni poligonale coordinata chiusa* Π, *tracciata in* A, *ed allora tutte le soluzioni del sistema sono olomorfe in* A *e sono date dalla* (3.3), *con* $\mathring{u}$ *vettore arbitrario ed il punto* z_0 *comunque fissato in* A, *l'integrazione essendo effettuata lungo una curva regolare, in particolare poligonale coordinata, tracciata in* A *e terminata ai punti* z_0 e z.

Ovviamente, l'ipotesi del teorema ora enunciato equivale a quella dell'olomorfia, nel campo A, di ogni soluzione del sistema omogeneo $(1)_0$, dalla quale si deduce quella di ogni soluzione del sistema aggiunto $(1)_0^*$, la tesi del teorema II e il seguente.

X. *Se il sistema omogeneo* $(1)_0$ *ha tutte le sue soluzioni olomorfe nel campo* A, *ciò accade anche per il sistema omogeneo* $(1)_0^*$ *ad esso aggiunto e condizione necessaria affinché il sistema* (1) *abbia soluzioni dello stesso tipo è che, comunque* *si tracci in* A, *una curva regolare chiusa* Γ, *per ogni soluzione* w *del sistema* $(1)_0^*$ *si abbia*

$$\int_\Gamma (w\,,f)\,\mathrm{d}z = 0\,, \tag{3.9}$$

avendo designata con $(w\,,f)$ *il prodotto scalare dei vettori* w *e* f. *Condizione sufficiente è che sussiste la* (3.9) *quando si assuma per* Γ *una qualsiasi poligonale coordinata chiusa, ed allora tutte le soluzioni del sistema* (1) *sono olomorfe in* A *e date dalla* (3.3).

D i m o s t r a z i o n e. – Assunto, ad arbitrio, un sistema di vettori $v_i(z)$ $(i = 1\,,2\,,\cdots,p)$, aventi le componenti $v_{i1}(z)\,,v_{i2}(z)\,,\cdots,v_{ip}(z)$ olomorfe in A, costituenti un sistema, fondamentale in A, di soluzioni del sistema omogeneo $(1)_0$, esiste uno ed un solo sistema di vettori $w^{(i)}(z)$ $(i = 1\,,2\,,\cdots,p)$ aventi le componenti $w_{1i}(s)\,,w_{2i}(z)\,,\cdots,w_{pi}(z)$, per le quali risulta, in A,

$$\sum_{i=1}^{p} w_{ki}(z)\,v_{ih}(z) = \delta_{hk} \qquad (h\,,k = 1\,,2\,,\cdots,p).$$

Le $w_{ki}(z)$ riescono funzioni di z, olomorfe in A, e, posto, per ogni punto $(z\,,\zeta)$ di A$\times$A,

$$r_{hk}(z\,,\zeta) \equiv \sum_{i=1}^{p} w_{ki}(\zeta)\,v_{ih}(z)\,, \qquad (h\,,k = 1\,,2\,,\cdots,p),$$

la matrice $r(z\,,\zeta) \equiv \big(\!\big(v_{hk}(z\,,\zeta)\big)\!\big)$ è la risolvente del sistema (1). I vettori $w^{(i)}(z)$ costituiscono un sistema, fondamentale in A, di soluzioni del sistema $(1)_0^*$ e la componente h^{ma} del vettore

$$\int_\Gamma r(z\,,\zeta)\,f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

è data da

$$\int_\Gamma \sum_{k=1}^{p} r_{hk}(z\,,\zeta)\,f_k(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{p} v_{ih}(z) \int_\Gamma (w^{(i)}\,,f)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

e pertanto, data l'indipendenza lineare dei vettori $v_i(z)$, la (3.8) equivale alle

$$\int_\Gamma (w^{(i)}\,,f)\,\mathrm{d}\zeta = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,\cdots,p),$$

cioè alla (3.9) per qualsivoglia soluzione $w(z)$ del sistema $(1)_0^*$.

4. **Ancora sul caso particolare di una sola equazione differenziale d'ordine arbitrario.** – Vale certo la pena di considerare – infine, rapidamente – il caso particolare dell'unica equazione differenziale (2.1), d'ordine arbitrario $p + 1$, avente i coefficienti $a_k(z)$ e il termine noto $f(z)$, funzioni della variabile

complessa z, olomorfe, nel campo più volte connesso A. Si può affermare quanto segue.

Se il numero m delle lacune di A è maggiore di uno, l'equazione è, in generale, priva di soluzioni olomorfe in A. Se il campo A presenta una sola lacuna e l'equazione omogenea $(2.1)_0$ ha lo zero come unica soluzione olomorfa in A, l'equazione (2.1), comunque si assegni una tale funzione $f(z)$, ha sempre una ed una sola soluzione olomorfa in A.

Se l'equazione (2.1) possiede una funzione risolvente $\rho(z, \zeta)$, funzione del punto (z, ζ) olomorfa nel campo $A \times A$, se cioè, l'equazione omogenea (2.1) e quindi la sua aggiunta

$$(2.1)_0^* \qquad \frac{d^{p+1} u}{dz^{p+1}} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \frac{d^k}{dz^k} [a_k(z)\, u(z)],$$

hanno tutte le loro soluzioni olomorfe in A, in particolare, se tutti i coefficienti $a_k(z)$ dell'equazione (2.1) sono funzioni di z, olomorfe nel campo A'', condizione necessaria affinché l'equazione (2.1) abbia soluzioni olomorfe in A, è che, per ogni curva regolare chiusa Γ, ivi tracciata, si abbia

$$(4.1) \qquad \int_\Gamma \rho(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

condizione sufficiente è che ciò si verifichi quando la curva Γ è una poligonale coordinata chiusa. Soddisfatta questa condizione, tutte le soluzioni dell'equazione (2.1) sono olomorfe in A e vi sono date dalla formola:

$$(4.2) \qquad u(z) = \sum_{i=0}^{p} u_0^{(i)} \left[\frac{(z-z_0)^i}{i!} - \int_{z_0}^{z} \rho(z, \zeta) \sum_{k=0}^{i} a_k(\zeta) \frac{(\zeta - z_0)^{i-k}}{(i-k)!}\, d\zeta \right]$$

$$+ \int_{z_0}^{z} \rho(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

ove la $u_0^{(i)}$ $(i = 0, 1, \cdots, p)$ sono costanti arbitrarie, z_0 è un punto arbitrariamente fissato in A, le integrazioni essendo effettuate, lungo curve regolari, in particolare poligonali coordinate, tracciate in A, terminate ai punti z_0 e z.

Infatti, se, essendo $\rho(z, \zeta)$ funzione del punto (z, ζ) olomorfa nel campo $A \times A$, esiste una soluzione $u(z)$ della (2.1) olomorfa in A, assunta, arbitrariamente, una curva regolare chiusa Γ, tracciata in A, dall'identità

$$\frac{d^{p+1} u}{d\zeta^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(\zeta) \frac{d^k u}{d\zeta^k} = f(\zeta),$$

si trae

$$\int_\Gamma \rho(z, \zeta) \left[\frac{d^{p+1} u}{d\zeta^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(\zeta) \frac{d^k u}{d\zeta^k} \right] d\zeta = \int_\Gamma \rho(z, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

e quindi, con successive integrazioni per parti,

$$\int_\Gamma \rho(z,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta =$$

$$(-1)^{p+1} \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial^{p+1}}{\partial\zeta^{p+1}} \rho(z,\zeta) - \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p+1} \frac{\partial^k}{\partial\zeta^k} [a_k(\zeta), \rho(z,\zeta)] \right\} u(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

in forza della (3.9) di (N), scritta sostituendovi le variabili reali x e ξ con le complesse z e ζ.

Se sussiste la (4.1), essendo Γ un'arbitraria poligonale coordinata chiusa di A, la funzione

$$u(z) = (\Pi) \int_{z_0}^{z} \rho(z,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta,$$

comunque si assuma la poligonale coordinata Π, definisce, come subito si verifica, una funzione di z, olomorfa in A, soluzione della (2.1), nulla nel punto z_0, con tutte le sue derivate fino a quelle, incluse, d'ordine p. Si richieda una soluzione della (2.1), olomorfa in A, che nel punto z_0 di A, assuma il valore $u_0^{(0)}$ e la sua derivata i^{ma} il valore $u_0^{(i)}$, $(i = 1, 2, \cdots, p)$. Sia $\varphi(z)$ una funzione, comunque, scelta, olomorfa in A, che, nel punto z_0, assuma il valore $u_0^{(0)}$ e la sua derivata i^{ma} il valore $u_0^{(i)}$, la funzione $v(z) = u(z) - \varphi(z)$ è nulla nel punto z_0 con le sue derivate fino a quella inclusa, d'ordine p, e deve essere soluzione olomorfa in A, dell'equazione

$$\frac{d^{p+1} v}{dx^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(z) \frac{d^k v}{dz^k} = f(z) - \left(\frac{d^{p+1} \varphi}{dz^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(z) \frac{d^k \varphi}{dz^k} \right).$$

Ma per ogni curva regolare chiusa Γ di A, risulta:

$$\int_\Gamma \rho(z,\zeta) \left(\frac{d^{p+1} \varphi}{d\zeta^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(\zeta) \frac{d^k \varphi}{d\zeta^k} \right) d\zeta = 0,$$

e si ha quindi, per quanto precede, in virtù della (4.1),

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} \rho(z,\zeta) f(\zeta)\, d\zeta - \int_{z_0}^{z} \rho(z,\zeta) \left(\frac{d^{p+1} \varphi}{d\zeta^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(\zeta) \frac{d^k \varphi}{d\zeta^k} \right) d\zeta,$$

donde la (4.2), se si assume per $\varphi(z)$ un polinomio di grado p.

Tenuto conto, infine, del teorema X di (N), nel quale le variabili reali x e ξ sono sostituite con le complesse z e ζ, possiamo affermare quanto segue.

Se l'equazione omogenea $(2.1)_0$ ha tutte le sue soluzioni olomorfe nel campo più volte connesso A, ciò accade anche per l'equazione omogenea $(2.1)_0^*$ ad essa aggiunta e condizione necessaria affinché l'equazione (2.1) abbia soluzioni dello stesso tipo, è che, comunque si tracci in A una curva regolare chiusa Γ, per ogni soluzione $w(z)$ dell'equazione $(2.1)_0^*$ si abbia

$$\int_\Gamma wf \, dz = 0 \,. \tag{4.3}$$

Condizione sufficiente è che la (4.3) si verifichi quando si assuma per Γ una qualsivoglia poligonale coordinata chiusa, ed allora, tutte le soluzioni della (2.1) sono olomorfe in A e sono date dalla (4.2), con le $u_0^{(i)}$ $(i = 0, 1, \cdots, p)$ costanti arbitrarie e il punto z_0 comunque fissato in A, le integrazioni essendo effettuate lungo curve regolari di A, in particolare poligonali coordinate, terminate ai punti z_0 e z.