Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Nicolae Șandru

Le théorème de réciprocité dans l'élasticité asymétrique (cas dynamique)

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 78–81.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_78_0>

Meccanica. — *Le théorème de réciprocité dans l'élasticité asymétrique (cas dynamique).* Nota di NICOLAE ŞANDRU, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

Soit V un corps élastique homogène et isotrope, du type de Cosserat, avec la frontière S. Soit encore F_i – les forces de volume, R_i – les forces superficielles, C_i – les moments de volume, M_i – les moments superficielles, u_i – les deplacements, Φ_i – les rotations (indépendentes de u_i), β_{ij} et φ_{ij} – les caractéristiques cinématiques de la déformation, σ_{ij} – les tensions, μ_{ij} – les couples de tension.

Les équations fondamentales du problème sont:
les équations de mouvement [2], [4]

$$\sigma_{ji,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i , \tag{1}$$

$$\mu_{ji,j} + \epsilon_{ikl}\,\sigma_{kl} + C_i = \mathfrak{J}\ddot{\Phi}_i , \tag{2}$$

les équations cinématiques

$$\beta_{ij} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\,\Phi_k , \tag{3}$$

$$\varphi_{ij} = \Phi_{i,j} , \tag{4}$$

la loi constitutive linéaire

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\beta_{hh} + 2\,\mu\,\overset{S}{\beta}_{ij} + 2\,\alpha\,\overset{A}{\beta}_{ij} , \tag{5}$$

$$\mu_{ij} = \beta\,\delta_{ij}\,\varphi_{hh} + 2\,\gamma\,\overset{S}{\varphi}_{ij} + 2\,\varepsilon\,\overset{A}{\varphi}_{ij} , \tag{6}$$

les conditions aux limites

$$\sigma_{ji}\,n_j = R_i , \tag{7}$$

$$\mu_{ji}\,n_j = M_i , \tag{8}$$

les conditions initiales

$$u_i(x_j , 0) = 0 \quad , \quad \dot{u}_i(x_j , 0) = 0 , \tag{9}$$

$$\Phi_i(x_j , 0) = 0 \quad , \quad \dot{\Phi}_i(x_j , 0) = 0 , \tag{10}$$

où les indices supérieurs S et A désignent la partie symétrique respectivement antisymétrique du tenseur et ϵ_{ikl} est le tenseur totalement antisymétrique du troisième ordre.

(*) Nella seduta del 9 gennaio 1965.

Désignons par $\tilde{f}(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, c'est-à-dire

$$(11) \qquad \tilde{f}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

En appliquant la transformée de Laplace par rapport au temps aux equations (1) – (10) l'on obtient [5]:

$$(1') \qquad \tilde{\sigma}_{ji,j} + \tilde{F}_i = \rho p^2 \tilde{u}_i ,$$

$$(2') \qquad \tilde{\mu}_{ji,i} + \epsilon_{ikl}\, \tilde{\sigma}_{kl} + \tilde{C}_i = \mathfrak{J}\, p^2\, \tilde{\Phi}_i ,$$

$$(3') \qquad \tilde{\beta}_{ij} = \tilde{u}_{i,j} - \epsilon_{kji}\, \tilde{\Phi}_k ,$$

$$(4') \qquad \tilde{\varphi}_{ij} = \tilde{\Phi}_{i,j} ,$$

$$(5') \qquad \tilde{\sigma}_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}\, \tilde{\beta}_{hh} + 2\, \mu\, \tilde{\beta}^{S}_{ij} + 2\, \alpha\, \tilde{\beta}^{A}_{ij} ,$$

$$(6') \qquad \tilde{\mu}_{ij} = \beta\, \delta_{ij}\, \tilde{\varphi}_{hh} + 2\, \gamma\, \tilde{\varphi}^{S}_{ij} + 2\, \varepsilon\, \tilde{\varphi}^{A}_{ij} ,$$

$$(7') \qquad \tilde{\sigma}_{ji}\, n_j = \tilde{R}_i ,$$

$$(8') \qquad \tilde{\mu}_{ji}\, n_j = \tilde{M}_i .$$

En ce qui concerne le corps élastique, on considére deux cas de chargement extérieure

$$(12) \qquad \mathfrak{J}^{(\alpha)} = \{ F_i^{(\alpha)}, C_i^{(\alpha)}, R_i^{(\alpha)}, M_i^{(\alpha)} \} \qquad (\alpha = 1, 2),$$

auxquels correspondent deux configurations élastiques

$$(13) \qquad \mathfrak{C}^{(\alpha)} = \{ u_i^{(\alpha)}, \Phi_i^{(\alpha)} \},$$

respectivement

$$(14) \qquad \{ \beta_{ij}^{(\alpha)}, \varphi_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}, \mu_{ij}^{(\alpha)} \}.$$

En partant de le relation

$$(15) \qquad \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}\, \tilde{\beta}_{ji}^{(2)} + \tilde{\mu}_{ij}^{(1)}\, \tilde{\varphi}_{ji}^{(2)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}\, \tilde{\beta}_{ji}^{(1)} + \tilde{\mu}_{ij}^{(2)}\, \tilde{\varphi}_{ji}^{(1)} ,$$

qu'on obtient de la même maniere que dans le cas statique [6], et qui généralise le théorème de réciprocité de Betti [1], on aboutit à

$$(16) \qquad \int_V (\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}\, \tilde{\beta}_{ji}^{(2)} + \tilde{\mu}_{ij}^{(1)}\, \tilde{\varphi}_{ji}^{(2)})\, dV = \int_V (\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}\, \tilde{\beta}_{ji}^{(1)} + \tilde{\mu}_{ij}^{(2)}\, \tilde{\varphi}_{ji}^{(1)})\, dV.$$

En utilisant les relations (1'), (2'), (3'), (4'), (7'), (8'), et la formule de Gauss–Ostrogradski, on transforme la première intégrale de la façon suivante:

$$\int_V (\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{\beta}_{ji}^{(2)} + \tilde{\mu}_{ij}^{(1)} \tilde{\varphi}_{ji}^{(2)})\, dV = \int_V \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} (\tilde{u}_{j,i}^{(2)} - \epsilon_{kij}\, \tilde{\Phi}_k^{(2)})\, dV + \int_V \tilde{\mu}_{ij}^{(1)} \tilde{\Phi}_{j,i}^{(2)}\, dV =$$

$$= \int_V (\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{u}_j^{(2)})_{,i}\, dV - \int_V \tilde{\sigma}_{ij,i}^{(1)} \tilde{u}_j^{(2)}\, dV - \epsilon_{kij} \int_V \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{\Phi}_k^{(2)}\, dV + \int_V (\tilde{\mu}_{ij}^{(1)} \tilde{\Phi}_j^{(2)})_{,i}\, dV -$$

$$- \int_V \tilde{\mu}_{ij,j}^{(1)} \tilde{\Phi}_j^{(2)}\, dV = \int_S \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{u}_j^{(2)} n_i\, dS - \int_V (\rho p^2\, \tilde{u}_j^{(1)} - \tilde{F}_j^{(1)})\, \tilde{u}_j^{(2)}\, dV -$$

$$- \epsilon_{kij} \int_V \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \tilde{\Phi}_k^{(2)}\, dV + \int_S \tilde{\mu}_{ij}^{(1)} \tilde{\Phi}_j^{(2)} n_i\, dS - \int_V (\Im p^2\, \tilde{\Phi}_j^{(1)} - \tilde{C}_i^{(1)} - \epsilon_{jkl}\, \tilde{\sigma}_{kl}^{(1)})\, \tilde{\Phi}_j^{(2)}\, dV.$$

En vertu de (16), l'on peut écrire

$$\int_S \tilde{R}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)}\, dS + \int_V (\tilde{F}_i^{(1)} - \rho p^2\, \tilde{u}_i^{(1)})\, \tilde{u}_i^{(2)}\, dV + \int_S \tilde{M}_i^{(1)} \tilde{\Phi}_i^{(2)}\, dS + \int_V (\tilde{C}_i^{(1)} - \Im p^2\, \Phi_i^{(1)})\, \tilde{\Phi}_i^{(2)}\, dV =$$

$$= \int_S \tilde{R}_i^{(2)} \tilde{u}_i^{(1)}\, dS + \int_V (\tilde{F}_i^{(2)} - \rho p^2\, \tilde{u}_i^{(2)})\, \tilde{u}_i^{(1)}\, dV + \int_S \tilde{M}_i^{(2)} \tilde{\Phi}_i^{(1)}\, dS + \int_V (\tilde{C}_i^{(2)} - \Im p^2\, \tilde{\Phi}_i^{(2)})\, \tilde{\Phi}_i^{(1)}\, dV.$$

C'est ainsi qu'on obtient la relation de réciprocité suivante entre les transformées de Laplace (de même que dans le cas statique)

$$(17)\qquad \int_S \tilde{R}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)}\, dS + \int_V \tilde{F}_i^{(1)} \tilde{u}_i^{(2)}\, dV + \int_S \tilde{M}_i^{(1)} \tilde{\Phi}_i^{(2)}\, dS + \int_V \tilde{C}_i^{(1)} \tilde{\Phi}^{(2)}\, dV =$$

$$= \int_S \tilde{R}_i^{(2)} \tilde{u}_i^{(1)}\, dS + \int_V \tilde{F}_i^{(2)} \tilde{u}_i^{(1)}\, dV + \int_S \tilde{M}_i^{(2)} \tilde{\Phi}_i^{(1)}\, dS + \int_V \tilde{C}_i^{(2)} \tilde{\Phi}_i^{(1)}\, dV.$$

En revenant à l'espace des fonctions originelles et en utilisant le théorème du produit de convolution, on peut écrire

$$(18)\qquad \int_V dV \int_0^t F_i^{(1)}(x_j, t-\tau)\, u_i^{(2)}(x_j, \tau)\, d\tau + \int_S dS \int_0^t R_i^{(1)}(x_j, t-\tau)\, u_i^{(2)}(x_j, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_V dV \int_0^t C_i^{(1)}(x_j, t-\tau)\, \Phi_i^{(2)}(x_j, \tau)\, d\tau + \int_S dS \int_0^t M_i^{(1)}(x_j, t-\tau)\, \Phi_i^{(2)}(x_j, \tau)\, d\tau =$$

$$= \int_V dV \int_0^t F_i^{(2)}(x_j, t-\tau)\, u_i^{(1)}(x_j, \tau)\, d\tau + \int_S dS \int_0^t R_i^{(2)}(x_j, t-\tau)\, u_i^{(1)}(x_j, \tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_V dV \int_0^t C_i^{(2)}(x_j, t-\tau)\, \Phi_i^{(1)}(x_j, \tau)\, d\tau + \int_S dS \int_0^t M_i^{(2)}(x_j, t-\tau)\, \Phi_i^{(1)}(x_j, \tau)\, d\tau.$$

Ce résultat généralise dans l'élasticité asymétrique (cas dynamique, rotations indépendentes, loi constitutive linéaire) le théorème donné pour l'élastodynamique classique par D. Graffi [3].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. BETTI, « Il Nuovo Cimento », ser. 2, vol. 7 (1872).

[2] COSSERAT E. et F., *Théorie des corps déformables*, Paris (1909).

[3] D. GRAFFI, *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari*, « Atti della Accad. delle Scienze di Bologna », ser. XI, t. X, 33–40 (1963).

[4] V. A. PALMOV, *Les équations fondamentales de l'élasticité asymétrique*, « Prikl. Math. Mech.», vol. 28, n. 3 (1964).

[5] J. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, New-York – Toronto – London, (1951).

[6] ŞANDRU N., *Le théorème de réciprocité du type de Betti dans l'élasticité asymetrique*, «C. R. Acad. Sci., Paris », t. 260, (1965).