
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ELISA GRANDORI GUAGENTI

Influenza del peso nel «distacco» di correnti idro-magnetiche piane con scia di Helmholtz

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.1, p. 70-77.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_70_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Influenza del peso nel «distacco» di correnti idromagnetiche piane con scia di Helmholtz* (*). Nota di ELISA GRANDORI GUAGENTI, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

1. In una Nota di recente pubblicazione ⁽¹⁾ mi sono occupata, sotto alcune ipotesi semplificative, del fenomeno del «distacco» magnetico, nel caso in cui il fluido, in moto piano, abbia conducibilità elettrica grande ma non tale da potersi considerare infinita. In tale Nota ho trascurato l'influenza del peso. Mi propongo ora di tenerne conto, come è essenziale nel caso di un liquido quando il piano direttore non è orizzontale.

Mi permetto di richiamare brevemente quelle considerazioni della precedente Nota, che sono necessarie alla presente.

Un corpo sia immerso in un fluido conduttore e venga investito dalla corrente fluida. Se il corpo è percorso da correnti elettriche si genera un campo magnetico che tenta di propagarsi nel fluido, ma ne è ostacolato dal fenomeno del «congelamento». In effetti, avendo supposto il numero di Reynolds magnetico molto grande, ma non tale da potersi considerare infinito, la propagazione del campo magnetico in senso trasverso al moto non è del tutto impedita, ma solo ostacolata grandemente. Il campo si propaga pressoché indisturbato lungo le linee di flusso, ma decade in breve spazio nelle altre direzioni.

Nella zona in cui è sensibile l'influenza del campo magnetico il fluido obbedisce alle equazioni della m.f.d. (magnetofluidodinamica). Sotto opportune ipotesi e a regime raggiunto, da queste scende il teorema di Bernoulli, pur di sostituire alla pressione meccanica p la pressione totale $p^* = p + \mu H^2/2$ (somma della pressione meccanica con quella magnetica $\mu H^2/2$, generata da un campo magnetico \mathbf{H} in un fluido di permeabilità magnetica μ). Precisamente se il fluido è incomprimibile e se il peso è trascurabile, dove il moto è regolare ⁽²⁾, è

$$(1) \quad \frac{p^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{cost.}$$

La (1) può comportare che, laddove H è troppo grande (non potendo né p né v divenire negativi), si formi una regione vuota ⁽³⁾. Perciò, a regime raggiunto, la situazione può presentarsi come segue.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

(1) E. GRANDORI GUAGENTI, *Sul «distacco» nelle correnti fluidomagnetiche piane con scia di Helmholtz*, «Ren. Ist. Lomb. Sc. e Lett.», in corso di stampa.

(2) Infatti si verifica facilmente che, essendo H trasverso al moto e costante nella sua direzione, valgono i teoremi di Thomson e di Lagrange sui vortici.

(3) Il fatto che valga il teorema di Bernoulli non è ipotesi essenziale al formarsi della regione vuota; Zhigulev ed altri fanno analoghe considerazioni deducendole dallo studio

Attorno al corpo c'è una regione vuota, che diremo C, in cui il campo magnetico esiste e valgono le equazioni di Maxwell (nel vuoto, in condizioni stazionarie):

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 .$$

Esse comportano che, essendo \mathbf{H} in direzione costante, sia $H = \text{costante}$.

Al di là della regione vuota si estende il fluido, nel quale il campo \mathbf{H} non penetra se non in una fascia circostante il vuoto, in una zona formata da due regioni nastriformi (che dalla fascia si dipartono) che si estendono verso l'infinito a valle, e nella scia B, compresa fra le due regioni nastriformi (in B per le ipotesi fatte il fluido è in quiete, ma solo mediamente, e il campo magnetico ha avuto modo di propagarsi).

Esternamente al corpo, alla regione vuota C, alla regione m.f.d., alla scia B, vi è la zona di fluido in cui valgono le ordinarie equazioni della dinamica dei fluidi.

2. INFLUENZA DEL PESO. – Nella presente Nota si abbandoni l'ipotesi che il peso sia trascurabile; si tratti cioè di un liquido, ed esso sia in moto piano non orizzontale. Sia x, y il piano del moto; l'asse y è la verticale ascendente, se il piano del moto è verticale, oppure è la stessa, ruotata di α , se il piano di moto è inclinato di α sulla verticale ($0 \leq \alpha < \pi/2$).

Richiamo per esteso le ipotesi che si introducono:

il corpo sia cilindrico indefinito e sia x, y il piano di una sua sezione normale, il cui contorno sia una linea chiusa;

il corpo sia percorso da correnti tali da generare un campo magnetico \mathbf{H} trasverso al moto e costante nella sua direzione;

il numero di Reynolds sia dell'ordine di 10^6 , cosicchè renda trascurabile la viscosità e comporti il formarsi di una scia di Helmholtz;

il numero magnetico di Reynolds sia molto maggiore di 1, ma non tale da potersi considerare infinito, cosicchè ogni propagazione trasversa del campo magnetico nel fluido è molto (ma non completamente) smorzata; e ciò significa che il campo magnetico decade in una regione circostante il corpo, in tutte le direzioni eccetto che lungo le linee di flusso lungo le quali il campo magnetico può propagarsi indisturbato.

Prima di accingerci a ricercare la forma della linea S, che separa la regione vuota C, dalla regione occupata dal fluido, facciamo le seguenti considerazioni.

Il teorema di Bernoulli, e cioè la (1), diviene nelle attuali ipotesi, se indichiamo con g il modulo dell'accelerazione di gravità moltiplicato per $\cos \alpha$,

$$(2) \quad \frac{p^*}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gy = \text{cost.}$$

dello strato limite (ved. ad esempio V. N. ZHIGULEV, *On the Phenomenon of Magnetic «Detachment» of the Flow of a Conducting Medium*, «Soviet Phys. Doklady», 4, (1959), p. 514.

Ma per le considerazioni già fatte al paragrafo precedente a proposito del campo \mathbf{H} in C , e che rimangono tuttora valide, in C è $p^* = H^2/2$; perciò su S è

$$(3) \quad \frac{v^2}{2} + gy = \text{cost.}$$

Se, come nella Nota precedente, si suppone che il punto di prora O sia punto di momentaneo arresto, ed ivi si assume l'origine degli assi, la (3) diviene

$$(4) \quad v^2 + 2gy = 0,$$

da cui discende che deve essere sul pelo libero S

$$y \leq 0$$

(uguale a zero per la eventuale presenza di punti in cui la velocità si annulla). Ciò significa che, nei liquidi «ideali» con campo magnetico trasverso e in cui occorra tener conto della gravitazione, il distacco magnetico può avvenire solo nella regione inferiore al punto di prora.

Che il fatto sia possibile è del tutto conforme all'intuizione. Si pensi che inizialmente il campo magnetico si è propagato nel fluido suscitando delle forze ponderomotrici; lungo il profilo del corpo queste forze sono dirette verso l'alto nella regione sovrastante alla prora, verso il basso nella regione sottostante (eccetto che in eventuali zone in cui il profilo presenti delle rientranze o delle sporgenze accentuate). Esse perciò si sommano alla forza peso nella regione inferiore, vi si oppongono nella zona superiore. Questo fatto può aiutare a rendersi conto del perché la cavitazione possa formarsi solo nella regione sottostante alla prora ⁽⁴⁾.

Le considerazioni sinora fatte inducono a pensare che nel moto non orizzontale si realizzi una regione vuota attorno al corpo, nella regione sottostante alla prora, regione che, verso valle confina con la scia B lungo un profilo libero, che diciamo S_B . In effetti neppure tale situazione è possibile. Infatti su S_B non potrebbe esserci raccordo di pressioni. Invero nella scia B è

$$p^* = k - \rho gy,$$

mentre in C è $p^* = \text{cost.}$ Le pressioni si possono raccordare attraverso ad S_B , solo se S_B si riduce ad un punto (il caso in cui S_B sia un tratto orizzontale non mi sembra sia realizzabile).

Si osservi che la quota di P_2 è determinata. Infatti, in quanto P_2 appartiene ad S , in P_2 vale la (4); e, in quanto P_2 appartiene a λ_2 , il modulo della

(4) Qualora il campo magnetico non sia trasverso al moto, ma sia ad esso complanare, non si ha più la condizione che il distacco avvenga solo inferiormente (lo si verifica facilmente) e ciò è ancora conforme all'intuizione, perché in questo caso le forze ponderomotrici sono trasverse al moto e pertanto non possono influire sulla cavitazione, né favorendone né ostacolando il formarsi.

velocità in P_2 è c , se c è il valore asintotico di v . Pertanto la (4) fornisce la quota di P_2 ; essa è

$$(5) \quad y_{P_2} = -\frac{c^2}{2g}.$$

Si può concludere che, nel caso in cui il profilo presenti un punto la cui quota sia data dalla (5), si può avere il distacco magnetico nella zona inferiore alla prora, ed esso è illustrato dalla fig. 1. Il filone che arriva ad O segue da

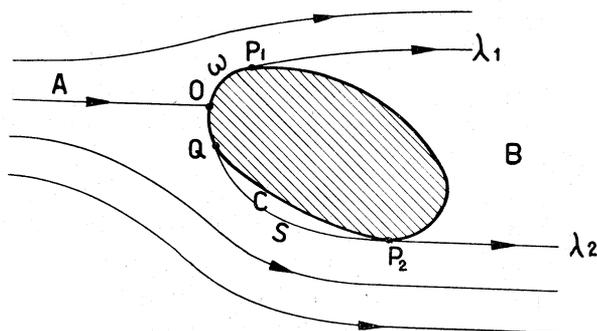


Fig. 1.

una parte il tratto di parete ω e poi il pelo libero λ_1 , dall'altra parte segue un tratto di parete, poi il pelo libero S , lambisce la parete nel sol punto P_2 e prosegue lungo il pelo libero λ_2 .

3. IMPOSTAZIONE ANALITICA. — Nella regione occupata dal fluido è presente, sia pur in una zona ristretta, il campo magnetico. Tuttavia l'incompressibilità del fluido e la regolarità del suo moto (che come si è detto nella nota ⁽²⁾ in calce comporta l'irrotazionalità) esigono che nel fluido sia

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Quindi per la determinazione degli elementi geometrici e meccanici del moto, in particolare per la determinazione del profilo S , è lecito valersi, come al solito, dell'ausilio delle funzioni di variabile complessa.

Si introduca pertanto la funzione di variabile complessa $\tau = \Omega + i\vartheta$, funzione della variabile complessa $z = x + iy$, definita dalla seguente relazione

$$u = e^{-\tau},$$

essendo u la velocità complessa adimensionale data dal rapporto fra la velocità complessa $w = v_x - iv_y$ e il suo valore asintotico c , reale positivo perché si suppone che la velocità asintotica sia diretta e volta come l'asse x .

La parte reale della funzione, Ω , è uguale al $\ln c/v$, e il coefficiente dell'immaginario, ϑ , è uguale all'angolo che la velocità forma con l'asse x .

Vediamo ora quali siano le condizioni al contorno per la funzione τ . Sui peli liberi λ_1 e λ_2 è costante il modulo della velocità, come si vede scrivendo la (2) da una parte e dall'altra di essi e sottraendo. Poiché inoltre λ_1 e λ_2 passano per il punto all'infinito, su di essi è $v = c$. Ciò implica che ivi sia $\Omega = 0$.

Sul pelo libero S invece è costante la pressione totale; questo implica, per la (2), che ivi sia $gy + v^2/2 = \text{cost}$; ed essendo $v = ce^{-\Omega}$, su S si ha

$$(6) \quad \Omega = \frac{1}{2} \ln \frac{c^2}{k - 2gy},$$

dove k è una costante.

Il problema analitico si presenta per quanto detto in questi termini: i peli liberi sono caratterizzati da condizioni per la funzione Ω , parte reale della funzione τ di variabile complessa: essa deve essere nulla su λ_1 e λ_2 , mentre deve soddisfare la (6) su S;

il tratto di parete ω è invece caratterizzato dalla conoscenza su di esso, dell'angolo ϑ , e quindi del coefficiente dell'immaginario della funzione τ .

Le suddette condizioni sono del tipo semplicemente misto.

Risolviamo il problema secondo il metodo generale; esso consiste nel mutare il contorno in due rette che contornano una striscia infinita, di un piano ausiliario $\zeta = \xi + i\eta$, in modo che i profili liberi vadano su una delle due rette e il tratto di parete vada sull'altra retta. È noto che in tale piano ζ si determina la funzione τ , essendo noti i valori che la parte reale e il coefficiente dell'immaginario assumono rispettivamente sulle due rette che delimitano la striscia infinita.

Si ricordi che il teorema di Schwarz-Christoffel fornisce la trasformazione di un contorno semplicemente connesso di un piano ζ nell'asse reale di un piano $\sigma = \mu + i\nu$; precisamente è

$$(7) \quad \frac{d\zeta}{d\sigma} = A \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\sigma - \mu) d\vartheta(\mu) \right\},$$

dove $\vartheta(\mu)$ ha il solito significato di inclinazione sull'asse reale (nel piano di partenza; nel nostro caso sull'asse ξ).

Sia al solito $f = \varphi + i\psi$ il potenziale complesso, essendo φ il potenziale cinetico e ψ la funzione di corrente; inoltre si supponga che nel punto di prora il potenziale cinetico sia uguale a zero, il che si può sempre fare senza ledere la generalità.

Per eseguire la trasformazione desiderata si pensi che il contorno $\lambda_1 \omega S \lambda_2$ corrisponde nel piano del potenziale complesso f al semiasse reale positivo contato due volte, come rappresentato in fig. 2. Per trasformare il doppio bordo reale nei due lati della striscia desiderata, si ricorra ad una doppia applicazione del teorema di Schwarz-Christoffel.

Dapprima si muti il piano del potenziale complesso nel piano ausiliario $\sigma = \mu + i\nu$ mediante la trasformazione $f = \sigma^2$, con ciò il doppio bordo viene mutato nell'asse reale μ ; e poi il contorno della striscia desiderata (fig. 2)

nell'asse reale μ . Per questa seconda trasformazione si applichi la (7), tenendo presente che lungo il contorno della striscia \mathfrak{D} è costante salvo le due discontinuità di π nel punto $P_{1\infty}$ ed Q_∞ , che corrispondono ai punti $\mu = \mu_1$ e $\mu = \mu_0$. Per questo l'integrale della (7) si riduce alla somma di due termini e la (7) diviene:

$$(8) \quad \frac{d\zeta}{d\sigma} = A (\sigma - \mu_1)^{-1} (\sigma - \mu_0)^{-1}.$$

Integrando la (8), ed usufruendo delle due costanti per imporre la condizione che in P_1 la parte immaginaria di ζ abbia una discontinuità di $\pi/2$, e la

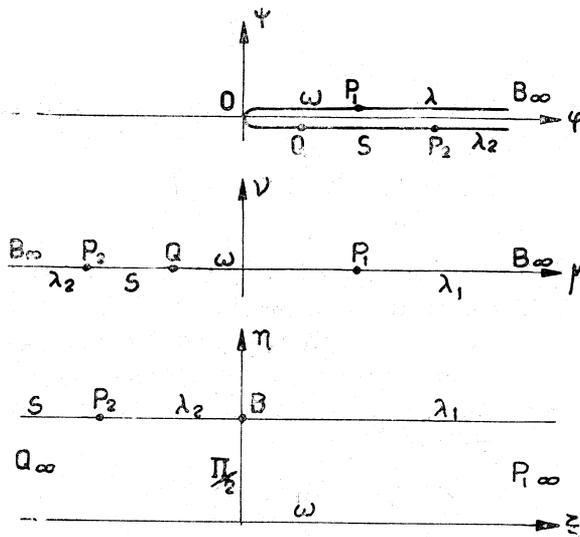


Fig. 2.

condizione (solo semplificatrice questa) che il punto B_∞ vada nel punto $\zeta = i(\pi/2)$, si ha

$$(9) \quad \zeta = \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma - \mu_0}{\mu_1 - \sigma}.$$

Eliminando σ tra la (9) e la relazione $f = \sigma^2$, si ha la trasformazione dal piano f al piano ζ . Infine sul piano ζ la risoluzione del problema semplicemente misto è (5)

$$(10) \quad \tau(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \mathfrak{D}_0(\xi) \operatorname{cosech}(\xi - \zeta) + \Omega_h(\xi) \operatorname{sech}(\xi - \zeta) \} d\xi,$$

dove gli indici o ed h indicano i valori assunti dalle funzioni sulle due rette.

(5) Vedi ad esempio L. C. WOODS, *The Theory of Subsonic Plane Flow*, Cambridge 1961, p. 113.

È da notare che compaiono le funzioni $\vartheta_0(\xi)$ e $\Omega_h(\xi)$, mentre per ora noi conosciamo le funzioni ϑ e Ω sui tratti del piano z corrispondenti alle due rette.

Per giungere alla conoscenza di $\vartheta_0(\xi)$ (ammesso che la parete non sia rettilinea nel qual caso ϑ_0 è costante), bisogna operare come segue. La formula di Schwarz-Christoffel che fornisce il passaggio dal piano z al piano σ è (valutando il ln della (7))

$$(11) \quad \ln \frac{dz}{d\sigma} = \ln A - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\sigma - \mu) d\vartheta(\mu),$$

ma sul contorno $\lambda_1 \omega S \lambda_2$, che è linea di flusso dove è $v = 0$, è anche

$$(12) \quad \left| \frac{dz}{d\sigma} \right| = \frac{ds}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{d\mu};$$

quindi la parte reale della (11), per $v = 0$, in un punto μ^* dà

$$(13) \quad \ln \vartheta'(\mu^*) = \ln |A| - \ln R(\vartheta(\mu^*)) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln |\mu^* - \mu| d\vartheta(\mu),$$

dove R è il raggio di curvatura e ϑ è l'inclinazione sull'asse reale di partenza, e cioè sull'asse x . È questa un'equazione integro-differenziale che permette di determinare $\vartheta(\mu)$ (in generale con metodi numerici⁽⁶⁾), sul tratto QP_1 corrispondente alla parete ω dove è noto il raggio di curvatura $R(\vartheta)$. La (9) poi fornisce, sullo stesso tratto, $\xi(\mu)$: infatti dove è $v = 0$, con $\mu_Q \leq \mu \leq \mu_r$ è anche $\eta = 0$, e la (9) diviene

$$(14) \quad \xi = \frac{1}{2} \ln \frac{\mu - \mu_Q}{\mu_r - \mu}.$$

Per quanto riguarda la determinazione della funzione $\Omega(\xi)$ sulla retta $\eta = \pi/2$, si tenga presente che essa deve essere nulla sul tratto $P_2 P_{1\infty}$, mentre deve essere una funzione nota, ma della variabile y , sul tratto $Q_\infty P_2$, per la (6). Per giungere alla determinazione di $\Omega(\xi)$ si osservi che la (10), integrata per parti, si può anche scrivere⁽⁷⁾

$$(15) \quad \tau(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tanh^{-1} \{ \exp(\xi - \zeta) \} d\vartheta_0(\xi) - \tan^{-1} \{ \exp(\xi - \zeta) \} d\Omega_h(\xi)].$$

Su $\eta = \pi/2$, dove $\zeta = \xi + i(\pi/2)$, la parte reale della (15) fornisce Ω_h in funzione di ξ ⁽⁸⁾. Per imporre alla funzione Ω_h di soddisfare la (6), si osservi che è

$$(16) \quad \frac{d\Omega_h}{d\xi} = \frac{d\Omega_h}{dy} \frac{dy}{d\xi}.$$

(6) Vedi ad esempio L. C. WOODS, loco citato, p. 168.

(7) Vedi L. C. WOODS, loco citato, p. 249 l'esponente -1 indica la funzione inversa.

(8) Data la complessità di questi passaggi, non scrivo per esteso tutte le funzioni ottenute per non appesantire troppo il testo. L'indice h sta ad indicare i valori che la funzione assume sulla retta $\eta = \pi/2$.

Ora il primo membro si calcola derivando la funzione trovata (formalmente) $\Omega_h(\xi)$; $d\Omega_h/dy$ si calcola dalla (6) e si esprime in funzione di Ω , che a sua volta è la nostra funzione incognita di ξ ; e infine per ricavare $dy/d\xi$ si procede come segue: il teorema di Schwarz-Christoffel, e cioè la (11), fornisce (formalmente) la trasformazione del piano z nel piano σ ; precisamente è, se z_0 e σ_0 sono due punti corrispondenti

$$(17) \quad z - z_0 = A \int_{\sigma_0}^{\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\sigma - \mu) d\vartheta(\mu) \right\} d\sigma;$$

e, per la (9), sulla retta $\zeta = \xi + i(\pi/2)$, la (17) fornisce z in funzione di ξ ; considerandone la parte immaginaria si ha y in funzione di ξ , la cui derivata è appunto il termine $dy/d\xi$ che si voleva determinare. Si sostituiscano ora questi tre valori così determinati per $d\Omega_h/d\xi$, $d\Omega_h/dy$, $dy/d\xi$ nella (16), e si ottiene un'equazione che consente di determinare $\Omega_h(\xi)$ (sempre con metodi numerici).

La conoscenza della funzione τ permette, come è noto, di calcolare tutti gli elementi geometrici e meccanici.

In particolare per quanto riguarda la determinazione dei peli liberi e la distribuzione della velocità sulla parete, si osservi che, valutando la (15) sulla retta di contorno $\eta = 0$ e valutandone la parte reale, si ottiene $\Omega_0(\xi)$, mentre valutando la (15) sull'altra retta di contorno $\eta = \pi/2$, e considerandone la parte immaginaria si ottiene $\vartheta_h(\xi)$. La funzione $\Omega_0(\xi)$, per la sua stessa definizione, consente di determinare la distribuzione di velocità sul tratto corrispondente alla parete. La funzione $\vartheta_h(\xi)$, per la definizione stessa di ϑ consente di determinare l'equazione intrinseca dei peli liberi; precisamente, per trovare $\vartheta(s)$, occorre tener presente che s è funzione di ξ , secondo la relazione

$$s(\xi) = \int \frac{1}{v} \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi$$

(per la definizione stessa di potenziale cinetico).