Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sull'incremento di volume di un corpo per deformazioni finite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 67–69.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_67_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Meccanica. — *Sull'incremento di volume di un corpo per deformazioni finite.* Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata [*] dal Socio G. KRALL.

Nello studio della stabilità dei sistemi elastici, specie quando la sollecitazione esterna non è invariabile (come nel caso di una pressione uniforme), è sistematico l'intervento di un termine che rappresenta l'incremento di volume della configurazione attuale in corrispondenza ad uno spostamento arbitrario dei punti della frontiera. Più precisamente interviene la sola parte di secondo ordine nelle componenti di spostamento [1].

Al calcolo dell'incremento di volume di un corpo in funzione delle componenti di spostamento è stata dedicata una relazione del prof. PICONE all'I.N.A.C. ma in essa si considera il solo caso di un cilindro circolare o non. In questa Nota la questione viene affrontata in *tutta generalità* pervenendo ad una formula esplicita nelle componenti di spostamento che, per spostamenti normali, si riduce, come è naturale, alla ben nota formula di STEINER [2]. Va sottolineata la circostanza che *nella espressione esatta per spostamenti finiti non si hanno termini di ordine superiore al terzo* nelle componenti di spostamento e derivate prime.

Siano: Σ una superficie chiusa e regolare dello spazio ordinario; $OQ = OQ(\alpha, \beta)$ (O punto fisso e Q punto generico di Σ) l'equazione di Σ riferita a linee di curvatura $\alpha =$ var. e $\beta =$ var.;

$$ds^2 = A^2(\alpha, \beta)\, d\alpha^2 + B^2(\alpha, \beta)\, d\beta^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare di Σ; $T \equiv Q\boldsymbol{t}_1\,\boldsymbol{t}_2\,\boldsymbol{t}_3$ la terna, trirettangola e levogira, costituita rispettivamente dai versori delle tangenti alle linee di curvatura e dal versore della normale a Σ in Q; ∂_i $(i = 1, 2)$ le derivate direzionali secondo le linee di curvatura, precisamente

$$\partial_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} \quad , \quad \partial_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta} \,. \tag{2}$$

Valgono le formule [3]:

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_1 \boldsymbol{t}_1 = -\frac{1}{A}\partial_2 A\, \boldsymbol{t}_2 + \frac{1}{R_1}\boldsymbol{t}_3 \quad , \quad \partial_1 \boldsymbol{t}_2 = \frac{1}{A}\partial_2 A\, \boldsymbol{t}_1 \quad , \quad \partial_1 \boldsymbol{t}_3 = -\frac{1}{R_1}\boldsymbol{t}_1 \\ &\partial_2 \boldsymbol{t}_1 = \frac{1}{B}\partial_1 B\, \boldsymbol{t}_2 \quad , \quad \partial_2 \boldsymbol{t}_2 = -\frac{1}{B}\partial_1 B\, \boldsymbol{t}_1 + \frac{1}{R_2}\boldsymbol{t}_3 \quad , \quad \partial_2 \boldsymbol{t}_3 = -\frac{1}{R_2}\boldsymbol{t}_2 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

(1) Cfr. G. KRALL e D. CALIGO, *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*, « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », ser. VIII, *30*, 423 (1962).

(2) Cfr. M. PICONE, *Lezioni di Analisi matematica*, vol. I, parte 2ª, Circolo Matematico di Catania (1923), p. 739.

(3) Cfr. ad esempio B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna (1961), 2ª ed. p. 234.

ove R_1 ed R_2 sono i raggi di curvatura principali nel punto Q presi col segno + o — a seconda che $\boldsymbol{t}_3$ sia orientato o non verso la concavità della superficie Σ. Nel seguito si suppone $\boldsymbol{t}_3$ orientato verso l'*interno* della superficie, quindi $R_i > 0$ $(i = 1, 2)$ se Σ è convessa.

Si consideri ora uno spostamento *regolare*, $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ della superficie Σ:

$$\boldsymbol{s}(Q) \equiv QQ' = u\boldsymbol{t}_1 + v\boldsymbol{t}_2 + w\boldsymbol{t}_3 . \tag{4}$$

Si richiede il volume V dello strato compreso tra la superficie Σ e la sua deformata Σ' *in termini di componenti di spostamento* u, v e w.

Ammesso che il punto generico P dello strato appartenga ad uno ed uno solo dei vettori $\boldsymbol{s}$, si può scrivere

$$OP = OQ + \sigma \frac{\boldsymbol{s}}{s} \qquad (0 \leq \sigma \leq s) \tag{5}$$

e interpretare α, β e σ come coordinate curvilinee dello strato stesso. L'elemento di volume è allora espresso dal prodotto misto

$$\left[\boldsymbol{t}_1 + \sigma \partial_1\left(\frac{\boldsymbol{s}}{s}\right)\right] \wedge \left[\boldsymbol{t}_2 + \sigma \partial_2\left(\frac{\boldsymbol{s}}{s}\right)\right] \times \frac{\boldsymbol{s}}{s} d\Sigma\, d\sigma \equiv \left[\boldsymbol{t}_3 + \frac{\sigma}{s}(\boldsymbol{t}_1 \wedge \partial_2 \boldsymbol{s} + \partial_1 \boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{t}_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^2}{s^2} \partial_1 \boldsymbol{s} \wedge \partial_2 \boldsymbol{s}\right] \times \frac{\boldsymbol{s}}{s} d\Sigma\, d\sigma \qquad (d\Sigma = AB\, d\alpha\, d\beta).$$

Di qui, integrando rispetto a σ tra 0 ed s si ottiene, per il volume con segno dello strato [4], la formula generale

$$V = -\int_{\Sigma} \left[\boldsymbol{t}_3 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_1 \wedge \partial_2 \boldsymbol{s} + \partial_1 \boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{t}_2) + \frac{1}{3} \partial_1 \boldsymbol{s} \wedge \partial_2 \boldsymbol{s}\right] \times \boldsymbol{s}\, d\Sigma . \tag{6}$$

Per esplicitare nella (6) le parti di 1°, 2° e 3° ordine nelle componenti di spostamento si ponga

$$\partial_i \boldsymbol{s} = u_i \boldsymbol{t}_1 + v_i \boldsymbol{t}_2 + w_i \boldsymbol{t}_3 \qquad (i = 1, 2) \tag{7}$$

ove, come risulta dalla (3) e (4),

$$\begin{cases} u_1 = \partial_1 u + \dfrac{v}{A} \partial_2 A - \dfrac{w}{R_1} \quad , \quad v_1 = \partial_1 v - \dfrac{u}{A} \partial_2 A \quad , \quad w_1 = \partial_1 w + \dfrac{u}{R_1} \\ u_2 = \partial_2 u - \dfrac{v}{B} \partial_1 B \quad , \quad v_2 = \partial_2 v + \dfrac{u}{B} \partial_1 B - \dfrac{w}{R_2} \quad , \quad w_2 = \partial_2 w + \dfrac{v}{R_2} . \end{cases} \tag{8}$$

La (6) si può allora scrivere nella forma

$$V = \int_{\Sigma} (d_1 V + d_2 V + d_3 V) \tag{6'}$$

essendo

$$\begin{cases} d_1 V = -w d\Sigma \quad , \quad d_2 V = \dfrac{1}{2}(w_2 v - v_2 w + w_1 u - u_1 w)\, d\Sigma \\ d_3 V = \dfrac{1}{3}\left[u(w_1 v_2 - v_1 w_2) + v(u_1 w_2 - w_1 u_2) + w(v_1 u_2 - u_1 v_2)\right] d\Sigma . \end{cases} \tag{9}$$

(4) Positivo se nella deformazione aumenta il volume racchiuso da Σ.

Di qui, facendo intervenire i rapporti

$$p = \frac{u}{w} \quad , \quad q = \frac{v}{w} , \tag{10}$$

nonché le curvature media e totale di Σ

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad , \quad K = \frac{1}{R_1 R_2} , \tag{11}$$

si ottiene facilmente, in base alla (8), la forma esplicita:

$$\left\{\begin{aligned} & d_1 V = -w d\Sigma \ , \ d_2 V = \frac{1}{2} w^2 [H + \frac{p^2}{R_1} + \frac{q^2}{R_2} - \frac{1}{A} \partial_2 (Aq) - \frac{1}{B} \partial_1 (Bp)] \, d\Sigma \\ & d_3 V = -\frac{1}{3} w^3 \Big(K + \frac{1}{R_2} \Big\{ \frac{p^2}{R_1} - \partial_1 p - q \Big[(1 + p^2 + q^2) \frac{\partial_2 A}{A} + q^2 \partial_1 \Big(\frac{p}{q} \Big) \Big] \Big\} + \\ & \quad + \frac{1}{R_1} \Big\{ \frac{q^2}{R_2} - \partial_2 q - p \Big[(1 + p^2 + q^2) \frac{\partial_1 B}{B} + p^2 \partial_2 \Big(\frac{q}{p} \Big) \Big] \Big\} + \\ & \quad + \frac{1}{2} \Big[\frac{\partial_1 B}{B} \partial_1 (p^2 + q^2) + \frac{\partial_2 A}{A} \partial_2 (p^2 + q^2) + \partial_1 p \partial_2 q - \partial_2 p \, \partial_1 q \Big] \Big) d\Sigma . \end{aligned}\right. \tag{9'}$$

Per $u = v = 0 , w = -r$ (il segno — è dovuto alla diversa convenzione di orientamento per la normale alla superficie Σ) si ritrova la ben nota formula di STEINER

$$V = \int_\Sigma \Big(1 + H \frac{r}{2} + K \frac{r^2}{3} \Big) r d\Sigma, \tag{12}$$

che presuppone assegnato lo spessore dello strato e non le componenti di spostamento del punto generico di Σ.

Nel caso di un tronco di cilindro (anche non circolare) a generatrici parallele all'asse x, indicati con ψ l'anomalia della normale principale alla direttrice e con $R(\psi)$ il raggio di curvatura, si ha [(5)]:

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \partial_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \quad , \quad A = 1 \quad , \quad B = R = R_2 \quad , \quad \frac{1}{R_1} = 0 . \tag{13}$$

La (9') si scrive allora al modo seguente [(6)]:

$$\left\{\begin{aligned} & d_1 V = -Rw \, dx \, d\psi \quad , \quad d_2 V = \frac{1}{2} w^2 \Big[1 + \frac{v^2}{w^2} - \frac{\partial}{\partial \psi} \Big(\frac{v}{w} \Big) - R \frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{u}{w} \Big) \Big] dx \, d\psi \\ & d_3 V = \frac{1}{3} w^3 \Big[\frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{u}{w} \Big) + \frac{v^3}{w^3} \frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{u}{v} \Big) + \frac{\partial}{\partial \psi} \Big(\frac{u}{w} \Big) \frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{v}{w} \Big) - \frac{\partial}{\partial x} \Big(\frac{u}{w} \Big) \frac{\partial}{\partial \psi} \Big(\frac{v}{w} \Big) \Big] dx \, d\psi . \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Queste formule, come quelle (9') del caso generale, esauriscono in rigore il calcolo del volume dello strato compreso tra Σ e la trasformata Σ' per deformazioni finite.

(5) Si prescinde dalle basi il cui contributo al volume è di facile calcolo.

(6) Per $d_1 V$ e $d_2 V$ si confronti (1), p. 423.