Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mauro Picone

Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie, con la variabile indipendente reale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 3–17.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_3_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 gennaio 1965

Presiede il Socio anziano MAURO PICONE

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie, con la variabile indipendente reale.* Nota (*) del Socio MAURO PICONE.

Ad Alessandro Terracini nel suo settantacinquesimo anniversario, rievocando quanto egli ha fatto al V Corpo d'Armata e alla VI Armata per la nostra artiglieria operante nella guerra 1915–18.

Consentendo al numero delle equazioni, pari a quello delle funzioni incognite, competente ad un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie, di essere arbitrario, si può, com'è ben elementare, fare la teoria generale di tali sistemi considerando, soltanto, quelli di equazioni differenziali del prim'ordine. Ed io così farò nella Nota presente, dedicando, però, il suo n. 3 ad una diversa rapida trattazione del caso particolare, importate, di una sola equazione differenziale d'ordine arbitrario, caso considerato, anche, al n. 4.

Assegnati: la matrice quadrata, d'ordine p,

$$a \equiv \left(\left(a_{hk}(x)\right)\right) \qquad (h , k = 1 , 2 , \cdots , p),$$

ad elementi $a_{hk}(x)$ funzioni complesse della variabile reale x, continue nell'intervallo aperto A dell'asse reale x; il vettore

$$f(x)$$

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1964.

a p componenti complesse

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x),$$

funzioni della variabile reale x, esse pure continue nell'intervallo A, prevalentemente considererò, qui, dunque, in tale intervallo, il sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie, del primo ordine:

$$\frac{du}{dx} + au = f, \tag{1}$$

nel vettore incognito u a p componenti complesse.

Per ogni punto ξ, dell'intervallo A, s'introduca il sistema di p soluzioni

$$u_1(x, \xi), u_2(x, \xi), \cdots, u_p(x, \xi), \tag{2}$$

del sistema omogeneo

$$\frac{du}{dx} + au = 0, \tag{1$_0$}$$

per le quali, dette

$$u_{h1}(x, \xi), u_{h2}(x, \xi), \cdots, u_{hp}(x, \xi), \tag{2}$$

le componenti della $u_h(x, \xi)$, si abbia

$$u_{hk}(\xi, \xi) = \delta_{hk}, \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, p),$$

avendo δ_{hk} il significato del simbolo di Kronecker, rappresentando, cioè, esso, l'elemento della riga h^{ma} e della colonna k^{ma} della matrice unità δ, d'ordine p, avendosi, dunque,

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 0, & \text{per } h \neq k, \\ 1, & \text{per } h = k, \end{cases} \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, p).$$

Per ottenere il sistema (2) occorre e basta, conviene qui ricordarlo, possedere un qualsivoglia sistema particolare

$$v_1(x), v_2(x), \cdots, v_p(x),$$

di soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo $(1)_0$, cioè, come anche dirò, un sistema fondamentale di soluzioni del sistema $(1)_0$, e porre

$$u_h(x, \xi) = \sum_{i=1}^{p} w_{hi}(\xi)\, v_i(x) \qquad (h = 1, 2, \cdots, p),$$

con le $w_{hi}(\xi)$ verificanti le equazioni:

$$\sum_{i=1}^{p} w_{hi}(\xi)\, v_{ik}(\xi) = \delta_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, p).$$

Ebbene, chiamo *matrice risolvente* del sistema di equazioni (1) la seguente

$$r(x, \xi) \equiv \begin{pmatrix} u_{11}(x, \xi) & u_{21}(x, \xi) & \cdots & u_{p1}(x, \xi) \\ u_{12}(x, \xi) & u_{22}(x, \xi) & \cdots & u_{p2}(x, \xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{1p}(x, \xi) & u_{2p}(x, \xi) & \cdots & u_{pp}(x, \xi) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

ed è subito verificato che, riuscendo le $u_{hk}(x, \xi)$, con le loro derivate parziali del primo ordine, funzioni continue del punto (x, ξ) in $A \times A$, sussiste l'identità:

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x, \xi) + a(x) r(x, \xi) \equiv 0, \tag{4}$$

onde segue il teorema:

I. *Nota la matrice risolvente* (3) *del sistema di equazioni* (1), *la soluzione di tale sistema, verificante, nel punto* x_0, *di* A, *la condizione:*

$$u(x_0) = 0,$$

è data dalla formola:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} r(x, \xi) f(\xi) \, d\xi. \tag{5}$$

D i m o s t r a z i o n e. – Si ha, invero, per la funzione $u(x)$, definita dalla (5), $u(x_0) = 0$, e, per essere $r(x, x) \equiv \delta$,

$$\frac{du}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial x} r(x, \xi) f(\xi) \, d\xi + f(x),$$

e quindi

$$\frac{du}{dx} + au = \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\partial}{\partial x} r(x, \xi) + a(x) r(x, \xi) \right] f(\xi) \, d\xi + f(x),$$

donde la (1), in virtù della (4).

Tutto ciò trovasi già nel *Trattato di Analisi Matematica* di Picone e Fichera [1] dove, però, è chiamata matrice risolvente del sistema (1) la trasposta della matrice (3). La diversa definizione, qui adottata, di matrice risolvente è dovuta al proposito di fare qui, sistematicamente, uso del calcolo matriciale, ciò che semplifica molto i calcoli e l'esposizione dei risultati.

Il teorema I ha, ovviamente, soltanto valore formale [2], giacché ben si sa, fin da Lagrange, che, noto un qualsivoglia particolare sistema fondamentale di soluzioni del sistema $(1)_0$, l'integrale generale del sistema (1), può aversi – quando si sia, al variare della x, invertita una matrice, funzione di tale variabile – mediante sole quadrature.

Nella Nota presente, premettendo l'immediato calcolo diretto della matrice risolvente (3), osservo la compatta espressione – la (2.5) – certo utile e non priva di eleganza, che subito ne segue dell'integrale generale del sistema (1) semplificando così, al massimo, a mio parere, la fondamentale teoria dei sistemi

(1) PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi Matematica*, vol. II, n. 100, teorema XII [Tumminelli Editore, Roma (1955)].

(2) Però, tutt'altro che trascurabile; utile, per esempio, nella traduzione in equazione integrale di Fredholm di molti importanti problemi lineari per il considerato sistema di equazioni differenziali.

normali di equazioni differenziali lineari ordinarie, nonché le sue formole risolutive. La semplificazione, anche soltanto formale, di una teoria certamente facilita l'applicazione dei suoi risultati e, pertanto, io mi lusingo che il pur modesto ed elementare contributo della presente Nota possa riuscire utile e quindi che esso sia degno d'essere divulgato dagli Atti dell'Accademia dei Lincei.

Nel n. 4 della presente Nota si osservano alcuni teoremi d'approssimazione che subito si deducono dalla trattazione, ricevuta nei nn. precedenti, dalla teoria dei considerati sistemi di equazioni differenziali ordinarie, con la variabile indipendente reale, la quale inoltre, in una successiva prossima Nota, sarà trasportata al caso in cui la variabile indipendente è complessa, conseguendo risultati che reputo, in parte, nuovi e notevoli e forniscono, a mio parere, un valido appoggio alla mia opinione sull'utilità del nuovo assetto formale conseguito da quella teoria con la Nota presente e la successiva.

1. **Le serie per il calcolo della matrice risolvente.** – Il sistema di equazioni costituito dalla (4) e dalla

$$r(\xi, \xi) = \delta, \tag{1.1}$$

equivale all'unica equazione di Volterra

$$r(x, \xi) = \delta + \int_x^\xi a(s)\, r(s, \xi)\, ds, \tag{1.2}$$

che determina la matrice risolvente e ne offre il calcolo come somma della serie di Neumann, a quella relativa:

$$r(x, \xi) = \delta + \int_x^\xi a(s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^\xi a^{(n)}(x, s)\, ds, \tag{1.3}$$

essendo

$$\left\{ \begin{aligned} a^{(1)}(x, s) &= \int_x^s a(t)\, dt \cdot a(s), \\ a^{(n+1)}(x, s) &= \int_x^s a^{(n)}(x, t)\, dt \cdot a(s), \qquad (n = 1, 2, \cdots), \end{aligned} \right. \tag{1.4}$$

e, detto M(I) il massimo di $|a(x)|$ [3] in un intervallo finito I dell'intervallo A, avendosi, per x e ξ in I,

$$\left| \int_x^\xi a^{(n)}(x, s)\, ds \right| \leq M(I) \frac{(\text{mis } I)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{1.5}$$

(3) Con $|a(x)|$ indico il modulo della matrice $a(x)$, in una qualunque delle sue definizioni della teoria delle matrici.

Notiamo, fin da ora, che la matrice risolvente $r(x, \xi)$ è anche soluzione della seguente altra equazione di Volterra:

$$r(x, \xi) = \delta + \int_x^\xi r(x, s)\, a(s)\, ds, \tag{1.6}$$

che pure la determina.

Infatti, la soluzione di questa equazione è data dalla relativa serie di Neumann

$$r(x, \xi) = \delta + \int_x^\xi a(s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^\xi {}^{(n)}a(\xi, s)\, ds, \tag{1.7}$$

essendo

$$\left\{\begin{aligned} {}^{(1)}a(\xi, s) &= a(s) \int_s^\xi a(t)\, dt, \\ {}^{(n+1)}a(\xi, s) &= a(s) \int_s^\xi {}^{(n)}a(\xi, t)\, dt, \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}\right. \tag{1.8}$$

e valendo la stessa maggiorazione (1.5) per l'integrale $\int_x^\xi {}^{(n)}a(\xi, s)\, ds$.

La serie delle derivate parziali prime, rispetto alla x, dei termini della serie (1.7) è

$$-a(x) - \sum_{n=1}^{\infty} {}^{(n)}a(\xi, x),$$

ed avendosi, per x e ξ in un intervallo finito I di A,

$$|{}^{(n)}a(\xi, x)| \leqq \mathrm{M}(\mathrm{I}) \frac{(\mathrm{mis}\ \mathrm{I})^n}{n!},$$

questa serie converge totalmente in ogni tale intervallo. Pertanto, la soluzione della (1.6) possiede, continua in $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$, la derivata parziale rispetto alla x e dalla (1.6), supposta soddisfatta, risulta

$$r(x, x) \equiv \delta,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x, \xi) = \int_x^\xi \frac{\partial}{\partial x} r(x, s)\, a(s)\, ds - a(x),$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x} r(x, \xi) + a(x)\, r(x, \xi) = \int_x^\xi \left[\frac{\partial}{\partial x} r(x, s) + a(x)\, r(r, s)\right] a(s)\, ds,$$

donde anche la (4), in virtù dell'unicità della soluzione di un'equazione integrale lineare di Volterra.

Se si osserva, infine, che, posto, per un'arbitraria matrice quadrata b,

$$e^b = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} b^n,$$

nell'ipotesi che, comunque si assumano x e ξ nell'intervallo A, le matrici

$$a(x) \quad , \quad a(\xi), \tag{1.9}$$

siano, sempre, fra di loro permutabili, cioè siano tali le matrici

$$\int_x^\xi a(s)\,\mathrm{d}s \quad , \quad a(x),$$

la matrice

$$e^{\int_x^\xi a(s)\,\mathrm{d}s} \tag{1.10}$$

che riesce, allora, permutabile con entrambe le (1.9), verifica le (4) e (1.1), possiamo enunciare i teoremi seguenti.

II. *La matrice risolvente* $r(x, \xi)$ *del sistema* (1) è *data da entrambe le serie* (1.3) *e* (1.7), *che, mantenendo i punti* x *e* ξ *in un intervallo finito di* A, *convergono totalmente in tale intervallo, e nel caso che le matrici* (1.9) *siano sempre, per* x *e* ξ *in* A, *fra di loro permutabili, anche dall'esponenziale* (1.10), *che è somma di una serie di matrici quadrate d'ordine* p, *i cui termini, in ogni intervallo finito* I *dell'intervallo* A, *soddisfano alla stessa maggiorazione* (1.5) *di quelli delle serie* (1.3) *e* (1.7).

III. *La matrice risolvente* $r(x, \xi)$ *del sistema* (1) *verifica entrambe le equazioni integrali* (1.2) *e* (1.6) *e quindi, per essa, sussiste l'identità:*

$$\int_x^\xi a(s)\, r(s, \xi)\,\mathrm{d}s \equiv \int_x^\xi r(x, s)\, a(s)\,\mathrm{d}s,$$

e, come funzione di x, *è soluzione del sistema* (4) *e come funzione di* ξ, *del sistema*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} r(x, \xi) - r(x, \xi)\, a(\xi) = 0, \tag{1.11}$$

a quello aggiunto.

Ne segue che i coefficienti $w_{1i}(\xi), w_{2i}(\xi), \cdots, w_{pi}(\xi)$ della combinazione considerata nell'introduzione:

$$r_{hk}(x, \xi) = \sum_{i=1}^{p} w_{ki}(\xi)\, v_{ih}(x),$$

sono le componenti di un vettore $w^{(i)}(\xi)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ soluzione del sistema

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} - a^*(\xi)\, u = 0, \tag{1$)^*_0$}$$

aggiunto al sistema $(1)_0$ avendo designato con $a^*(\xi)$ la matrice trasposta alla $a(\xi)$ e costituendo i vettori $w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(p)}$, un sistema fondamentale di soluzioni del sistema stesso.

2. **L'integrale generale del sistema** (1), **di nota matrice risolvente.** – Nota la matrice risolvente del sistema (1), assegnato, ad arbitrio, un vettore $\mathring{u}$ a p componenti complesse, vogliamo esprimere, mediante quella, la soluzione di tale sistema, verificante, nel punto x_0 di A, la condizione:

$$u(x_0) = \mathring{u} . \tag{2.1}$$

Sia $\varphi(x)$ un arbitrario vettore, a p componenti complesse, funzione di x continua con la sua derivata prima $\varphi'(x)$, nell'intervallo A, per il quale si abbia

$$\varphi(x_0) = \mathring{u} , \tag{2.2}$$

e si ponga per la soluzione $u(x)$ del sistema (1), verificante la (2.1),

$$v(x) = u(x) - \varphi(x) .$$

Tale vettore $v(x)$ verifica il sistema di equazioni:

$$\frac{dv}{dx} + av = f - \varphi' - a\varphi \quad , \quad v(x_0) = 0 ,$$

e quindi, in forza del teorema I, si avrà

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} r(x, \xi)\, [f(\xi) - \varphi'(\xi) - a(\xi)\, \varphi(\xi)]\, d\xi ,$$

donde il teorema:

IV. *Nota la matrice risolvente $r(x, \xi)$ del sistema* (1), *l'integrale generale di questa è rappresentato dalla formola:*

$$u(x) = \varphi(x) - \int_{x_0}^{x} r(x, \xi)\, [\varphi'(\xi) + a(\xi)\, \varphi(\xi)]\, d\xi + \int_{x_0}^{x} r(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{2.3}$$ [4]

ove $\varphi(x)$ è un arbitrario vettore a p componenti complesse, funzione di x continua, nell'intervallo A, *con la sua derivata prima $\varphi'(x)$, verificante la condizione* (2.2), *$\mathring{u}$ essendo un assegnato arbitrario vettore a p componenti complesse, col quale deve coincidere la soluzione $u(x)$, nel fissato punto x_0 di* A.

Se, in particolare, si assume

$$\varphi(x) \equiv \mathring{u} , \tag{2.4}$$

(4) Che ammette, d'altra parte, un'immediata verifica.

osservando che, allora, risulta

$$\varphi(x) - \int_{x_0}^{x} r(x, \xi)\,[\varphi'(\xi) + a(\xi)\,\varphi(\xi)]\,\mathrm{d}\xi = \mathring{u} - \int_{x_0}^{x} r(x, \xi)\,a(\xi)\,\mathring{u}\,\mathrm{d}\xi =$$

$$\mathring{u} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial\xi} r(x, \xi)\,\mathring{u}\,\mathrm{d}\xi = r(x, x_0)\,\mathring{u},$$

si perviene ai teoremi seguenti.

V. *Nota la matrice risolvente* $r(x, \xi)$ *del sistema* (1), *il suo integrale generale è rappresentato dalla formola:*

$$u(x) = r(x, x_0)\,\mathring{u} + \int_{x_0}^{x} r(x, \xi)\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{2.5}$$

ed indicando δ_i *il vettore costituito dalle colonna* i^{ma} *della matrice* δ, *per la soluzione* i^{ma} *del sistema* (2) *di soluzioni della* (1_0), *che ha servito in principio, a definire la matrice risolvente, si ha, d'accordo con la* (3),

$$u_i(x, \xi) = r(x, \xi)\,\delta_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, p)\text{[5]}. \tag{2.6}$$

VI. *Nel caso particolare in cui le matrici* (1.9) *sono fra di loro permutabili, l'integrale generale del sistema* (1) *è dato dalla formola:*

$$u(x) = e^{\int_x^{x_0} a(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathring{u} + \int_{x_0}^{x} e^{\int_x^{\xi} a(s)\,\mathrm{d}s}\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

identica a quella che si ha nel caso particolare in cui $a(x)$ *e* $f(x)$ *sono funzioni scalari complesse e la soluzione* i^{ma} *del sistema* (2), *della formola*:

$$u_i(x, \xi) = e^{\int_x^{\xi} a(s)\,\mathrm{d}s}\,\delta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, p).$$

3. **Caso particolare di una sola equazione differenziale d'ordine arbitrario** – Siano assegnate nell'intervallo aperto A dell'asse reale x, la $p+2$ funzioni continue, scalari complesse,

$$a_0(x), a_1(x), \cdots, a_p(x), f(x)$$

e vogliamo considerare l'unica equazione differenziale normale, ordinaria, d'ordine $p+1$, nella funzione incognita scalare complessa $u(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}^{p+1} u}{\mathrm{d}x^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(x)\,\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k} = f(x). \tag{3.1}$$

(5) La formola (2.5) ha, ovviamente, importanza anche per il calcolo numerico della soluzione $u(x)$ del sistema (1), riducendosi, secondo essa, tale calcolo, a quello approssimato della somma della serie (1.3) e (1.7).

Equivalendo, quest'equazione, ad un particolare sistema normale, del prim'ordine, di $p+1$ equazioni differenziali lineari ordinarie nel vettore avente le $p+1$ componenti:

$$u_0 = u \,, u_1 = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \cdots, u_p = \frac{\mathrm{d}^p u}{\mathrm{d}x^p},$$

si potrebbe, ovviamente, esprimere l'integrale generale della (3.1) anche ricorrendo alla già considerata matrice risolvente di detto sistema. Ma credo che, nel caso particolare della (3.1), sia utile procedere anche nel seguente diverso modo.

Chiamo *funzione risolvente* dell'equazione (3.1) la funzione $\rho(x, \xi)$, delle due variabili reali x e ξ, definita in $A \times A$, che per ogni punto ξ di A, verifica, per x in A, le equazioni:

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial x^{p+1}} \rho(x, \xi) + \sum_{k=0}^{p} a_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \rho(x, \xi) = 0, \tag{3.2}$$

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial x^i} \rho(x, \xi)\right]_{x=\xi} = \begin{cases} 0, & \text{per } i < p, \\ 1, & \text{per } i = p. \end{cases} \tag{3.3}$$

È subito visto, ed è ben noto dagli elementi, utilizzando un qualsivoglia particolare sistema fondamentale di $p+1$ soluzioni dell'equazione omogenea

$$\frac{\mathrm{d}^{p+1} u}{\mathrm{d}x^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(x) \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k} = 0, \tag{3.1$_0$}$$

che la funzione $\rho(x, \xi)$, con le sue derivate parziali

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} \rho(x, \xi) \quad (i = 0, 1, \cdots, p+1), \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \rho(x, \xi) \tag{3.4}$$

riesce funzione continua del punto (x, ξ) in $A \times A$ ed inoltre che la soluzione $u(x)$ della (3.1), verificante, in un punto x_0 di A, le condizioni:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k}\right]_{x=x_0} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, p)$$

è rappresentata dalla formola:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) f(\xi) \, \mathrm{d}\xi \,.$$

Siano ora assegnati, ad arbitrio, i $p+1$ numeri complessi

$$u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \cdots, u_0^{(p)}$$

e si richieda la soluzione della (3.1) che verifica, nel punto x_0 di A, le condizioni:

$$\left[\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i}\right]_{x=x_0} = u_0^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, p). \tag{3.5}$$

Sia $\varphi(x)$ un'arbitraria funzione complessa, continua, in A, con le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine $p+1$, per la quale si abbia

$$\left[\frac{d^i \varphi}{dx^i}\right]_{x=x_0} = u_0^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, p), \tag{3.6}$$

e si ponga, per la soluzione $u(x)$ delle (3.1) e (3.5),

$$v(x) = u(x) - \varphi(x).$$

Tale funzione $v(x)$ verifica il sistema di equazioni:

$$\frac{d^{p+1} v}{dx^{p+1}} + \sum_{h=0}^{p} a_k(x) \frac{d^k v}{dx^k} = f(x) - \varphi^{(p+1)}(x) - \sum_{h=0}^{p} a_k(x) \varphi^{(k)}(x),$$

$$\left[\frac{d^i v}{dx^i}\right]_{x=x_0} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, p),$$

e si ha, pertanto, a norma di quanto precede,

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) \left[f(\xi) - \varphi^{(p+1)}(\xi) - \sum_{k=0}^{p} a_k(\xi) \varphi^{(h)}(\xi) \right] d\xi,$$

onde il teorema:

VII. *Nota la funzione* $\rho(x, \xi)$, *risolvente per l'equazione* (3.1) *l'integrale generale di questa è rappresentato dalla formola:*

$$u(x) = \varphi(x) - \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) \left[\varphi^{(p+1)}(\xi) + \sum_{k=0}^{p} a_k(\xi) \varphi^{(k)}(\xi) \right] d\xi + \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) f(\xi) \, d\xi .$$

ove $\varphi(x)$ *è un'arbitraria funzione complessa di* x, *continua, nell'intervallo* A, *con le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine* $p+1$, *verificante le condizioni* (3.6), *la quantità complessa* $u_0^{(i)}$ $(i = 0, 1, \cdots, p)$ *essendo il valore arbitrario assegnato alla derivata* i^{ma} *dell'integrale* $u(x)$ *nel punto* x_0 *di* A.

Se, in particolare, si assume

$$\varphi(x) \equiv \sum_{i=0}^{p} \frac{u_0^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i,$$

si perviene all'espressione seguente dell'integrale generale della (3.1):

$$u(x) = \sum_{i=0}^{p} u_0^{(i)} \left[\frac{(x-x_0)^i}{i!} - \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) \sum_{k=0}^{i} a_k(\xi) \frac{(\xi - x_0)^{i-k}}{(i-k)!} d\xi \right] + \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) f(\xi) \, d\xi . \tag{3.7}$$

In particolare, per $f(x) \equiv 0$, si ha che le $p+1$ funzioni

$$u_i(x) \equiv \frac{(x-x_0)^i}{i!} - \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) \sum_{k=0}^{i} a_k(\xi) \frac{(\xi - x_0)^{i-k}}{(i-k)!} d\xi ,$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots, p)$$

costituiscono un sistema fondamentale di $p+1$ soluzioni della $(3.1)_0$ avendosi:

$$\left[\frac{d^k u_i}{dx^k}\right]_{x=x_0} = \begin{cases} 0, & \text{per } k \neq i, \\ 1, & \text{per } k = i, \end{cases}$$

e per

$$f(x) \equiv 0 \quad , \quad u_0^{(i)} = \begin{cases} 0, & \text{per } i < p, \\ 1, & \text{per } i = p, \end{cases}$$

si perviene all'identità:

$$u_p(x) \equiv \rho(x, x_0) \equiv \frac{(x - x_0)^p}{p!} - \int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) \sum_{k=0}^{p} a_k(\xi) \frac{(\xi - x_0)^{p-k}}{(p-k)!} d\xi,$$

e quindi al teorema:

VIII. *La funzione risolvente* $\rho(x, \xi)$ *dell'equazione* (3.1) *è la soluzione dell'equazione di Volterra:*

$$\rho(x, \xi) = \frac{(x - \xi)^p}{p!} + \int_{x}^{\xi} \rho(x, s) \sum_{k=0}^{p} a_k(s) \frac{(s - \xi)^{p-k}}{(p-k)!} ds, \tag{3.8}$$

che la determina e ne offre il calcolo diretto come somma della relativa serie di Neumann.

È certo interessante verificare, direttamente, che la soluzione dell'equazione integrale (3.8) è, in $A \times A$, funzione dal punto (x, ξ) continua, con le sue derivate $\partial^i \rho / \partial x^i$ $(i = 1, 2, \cdots, p+1)$, $\partial \rho / \partial \xi$ e soddisfa le equazioni (3.2) e (3.3). Tale continuità è ben visibile dalla (3.8), supposta soddisfatta, per la derivata $\partial \rho / \partial \xi$ e per le altre è conseguenza della convergenza totale della serie delle derivate parziali i^{me} $(i = 1, 2, \cdots, p+1)$, rispetto alla x, dei termini della sopraddetta serie di Neumann, quando si mantengono x e ξ in un intervallo finito di A. Dopo ciò, con un calcolo semplice, si ottengono, dall'equazione (3.8), supposta soddisfatta, per derivazione, le identità (3.3) e la

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial x^{p+1}} \rho(x, \xi) + \sum_{k=0}^{p} a_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \rho(x, \xi) \equiv$$

$$\int_{x}^{\xi} \left[\frac{\partial^{p+1}}{\partial x^{p+1}} \rho(x, s) + \sum_{k=0}^{p} a_k(s) \frac{\partial^k}{\partial x^k} \rho(x, s)\right] \sum_{h=0}^{p} a_h(s) \frac{(s - \xi)^{p-k}}{(p-k)!} ds,$$

e quindi anche la (3.2), in virtù dell'unicità della soluzione di un'equazione di Volterra.

Dalla (3.8), supposta soddisfatta, si ricava anche che:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \rho(x, \xi) =$$

$$-\frac{(x - \xi)^{p-1}}{(p-1)!} - \int_{x}^{\xi} \rho(x, s) \sum_{k=0}^{p-1} a_k(s) \frac{(s - \xi)^{p-1-k}}{(p-1-k)!} ds + a_p(\xi) \rho(x, \xi),$$

e, pertanto, che $\rho(x, \xi)$ possiede la derivata parziale seconda

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\rho(x, \xi),$$

se e soltanto se il prodotto $a_p(\xi)\rho(x, \xi)$ possiede la derivata parziale prima rispetto alla ξ, ciò che avverrà se $a_p(\xi)$ è derivabile. Procedendo per induzione si perviene al teorema:

IX. *Se il coefficiente* $a_k(x)$ $(k = 1, 2, \cdots, p)$ *dell'equazione* (3.1) *possiede, continua in* A, *la derivata* k^{ma}, *la funzione risolvente* $\rho(x, \xi)$, *dell'equazione stessa, possiede, continue in* $A \times A$, *le derivate parziali*

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\rho(x, \xi), \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\rho(x, \xi), \cdots, \frac{\partial^{p+1}}{\partial\xi^{p+1}}\rho(x, \xi),$$

e, fissato comunque x *in* A, *verifica, per* ξ *in* A, *l'equazione differenziale*

$$\frac{\partial^{p+1}}{\partial\xi^{p+1}}\rho(x, \xi) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\frac{\partial^k}{\partial\xi^k}[a_k(\xi)\rho(x; \xi)]. \tag{3.9}$$

Ne segue:

X. Se $v_0(x), v_1(x), \cdots, v_p(x)$ *è un fissato qualsivoglia sistema fondamentale di soluzioni della* $(3.1)_0$, *risulta*

$$\rho(x, \xi) = \sum_{k=0}^{p} w_k(\xi)\, v_k(x), \tag{3.10}$$

e, nelle ipotesi del teorema precedente, le funzioni $w_0(x), w_1(x), \cdots, w_p(x)$, *costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea*

$$\frac{d^{p+1}u}{dx^{p+1}} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\frac{d^k}{dx^k}[a_k(x)\, u(x)], \tag{3.11}$$

aggiunta alla $(3.1)_0$.

Infatti, in virtù della (3.10), data l'indipendenza lineare, in A, delle funzioni $v_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, p)$, il verificarsi identico della (3.9) in $A \times A$, ha di conseguenza che le $w_k(x)$ sono soluzioni della (3.11). Inoltre, le (3.3) si traducono nelle identità:

$$\sum_{k=0}^{p} w_k(x)\, v_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } i < p, \\ 1, & \text{per } i = p, \end{cases}$$

dalle quali, per derivazione, seguono le altre

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{p} w_k^{(j)}(x)\, v_k^{(i)}(x) \equiv \begin{cases} 0 & , \text{ per } j < p - i \\ (-1)^j & , \text{ per } j = p - i \end{cases} \qquad (i = 0, 1, \cdots, p-1) \\ &\sum_{k=0}^{p} w_k^{(p)}(x)\, v_k(x) \equiv (-1)^p, \end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

e quindi che il prodotto del determinante wronskiano delle w_k per quello delle v_k vale, identicamente, uno e pertanto che anche il wronskiano delle w_k non è nullo.

Dalle (3.12) segue, infine, che, nelle ipotesi del teor. IX, la funzione risolvente $\rho(x, \xi)$ è anche caratterizzata dal soddisfare per ogni punto x di A, come funzione di ξ, l'equazione differenziale (3.9) e le condizioni:

$$\left[\frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \rho(x, \xi)\right]_{\xi = x} = \begin{cases} 0 \quad , & \text{per } i < p, \\ (-1)^p, & \text{per } i = p. \end{cases} \tag{3.13}$$

4. **Un teorema d'approssimazione.** – Per $f(x) \equiv 0$, la (2.5) fornisce la soluzione del sistema omogeneo $(1)_0$, la quale, per $x = x_0$, coincide col vettore $u(x)$, mentre il vettore

$$\int_{x_0}^{x} r(x, \xi) f(\xi) \, d\xi,$$

al secondo membro della (2.5) stessa, può essere rappresentato al modo seguente:

$$\int_{x_0}^{x} r(x, \xi) \left[\frac{du}{d\xi} + a(\xi) u(\xi)\right] d\xi, \tag{4.1}$$

onde il teorema:

XI. *Assunti, ad arbitrio, un vettore* $u(x)$, *continuo, nell'intervallo* A, *con la sua derivata prima, e un punto* x_0 *di* A, *il vettore* $\bar{u}(x)$, *soluzione del sistema omogeneo* $(1)_0$, *che, nel punto* x_0, *coincide col vettore* $u(x)$, *lo rappresenta, nell'intervallo* A, *con un errore dato dal vettore* (4.1).

Allo stesso modo, dalla (3.7), si deduce il teorema:

XII. *Assunti, ad arbitrio, una funzione scalare complessa* $u(x)$, *continua, nell'intervallo* A, *con le sue derivate fino a quella, inclusa, d'ordine* $p+1$, *e un punto* x_0 *di* A, *la funzione* $\bar{u}(x)$, *soluzione dell'equazone omogenea* $(3.1)_0$, *che, nel punto* x_0 *di* A, *verifica le condizioni:*

$$\bar{u}(x_0) = u(x_0) \quad , \quad \left[\frac{d^i \bar{u}}{dx^i}\right]_{x = x_0} = \left[\frac{d^i u}{dx^i}\right]_{x = x_0} \quad (i = 1, 2, \cdots, p), \tag{4.2}$$

rappresenta la funzione $u(x)$, *nell'intervallo* A, *con un errore dato dall'integrale:*

$$\int_{x_0}^{x} \rho(x, \xi) \left[\frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} + \sum_{k=0}^{p} a_k(\xi) \frac{d^k u}{d\xi^k}\right] d\xi .$$

Nel caso particolare

$$a_0(x) \equiv a_1(x) \equiv \cdots \equiv a_p(x) \equiv 0,$$

si ha

$$\rho(x, \xi) = \frac{(x - \xi)^p}{p!},$$

la funzione $\bar{u}(x)$ si riduce al polinomio di grado p, verificante le (4.2) e il teorema XII al teorema di Taylor con l'espressione integrale:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^p}{p!} \frac{d^{p+1} u}{d\xi^{p+1}} d\xi ,$$

del resto.

Designando n un numero naturale, comunque si assuma, nell'intervallo A, una funzione $u(x)$, continua con le sue derivate fino a quella inclusa d'ordine $2n+1$, esiste una ed una sola combinazione trigonometrica, a coefficienti α_k e β_k costanti,

$$u_n(x) = \alpha_0 + \sum_{b=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \operatorname{sen} kx),$$

che, nel fissato arbitrario punto x_0 da A, verifica le $2n+1$ condizioni:

$$\left[\frac{d^i u_n}{dx^i}\right]_{x=x_0} = \left[\frac{d^i u}{dx^i}\right]_{x=x_0}, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, 2n),$$

che, come dirò, ha, con $u(x)$, nel punto x_0, un contatto d'ordine $2n$. Designata con $\rho_n(x, \xi)$ la funzione risolvente, *che si ottiene con soli calcoli algebrici*, dell'equazione differenziale, caratterizzante le considerate combinazioni trigonometriche,

$$\frac{d}{dx} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right) u \equiv \frac{d^{2n+1} u}{dx^{2n+1}} + \sum_{k=0}^{2n} a_k^{(n)} \frac{d^k u}{dx^k} = 0,$$

ove le $a_k^{(n)}$ sono numeri interi, positivi per k dispari, nulli per k pari, si ha dunque, per x in A, come altro notevole caso particolare del teorema XII,

$$u(x) - u_n(x) = \int_{x_0}^{x} \rho_n(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + k^2\right) u(\xi) \, d\xi ,$$

essendo [cfr. la (3.7)]:

$$u_n(x) \equiv \sum_{i=0}^{2n} \left[\frac{d^i u}{dx^i}\right]_{x=x_0} \left[\frac{(x-x_0)^i}{i!} - \int_{x_0}^{x} \rho_n(x, \xi) \sum_{k=0}^{i} a_k^{(n)} \frac{(\xi - x_0)^{i-k}}{(i-k)!} d\xi\right].$$

Per esempio, se si pone $n = 1$ per la combinazione trigonometrica

$$u_1(x) \equiv u''(x_0) + u(x_0) - u''(x_0) \cos(x - x_0) + u'(x_0) \operatorname{sen}(x - x_0), \tag{4.3}$$

che, nel punto x_0, oscula la $u(x)$, si ha:

$$u(x) - u_1(x) = \int_{x_0}^{x} [1 - \cos(x - \xi)] [u'''(\xi) + u'(\xi)] \, d\xi,$$

e pertanto, se si suppone $u(x)$ reale e $x \neq x_0$, esiste un punto η, *interno* all'intervallo che ha per estremi i punti x_0 e x, per il quale risulta

$$u(x) - u_1(x) = [x - x_0 - \operatorname{sen}(x - x_0)]\,[u'''(\eta) + u'(\eta)]\,,$$

e se è, in A,

$$u'''(x) + u'(x) \geqq 0 \quad (\leqq 0)\,, \tag{4.4}$$

e, al variare di x esistono sempre, nel detto intervallo, punti per i quali, nella (4.4) non sussiste il segno eguale, la combinazione trigonometrica (4.3), osculante la $u(x)$ nel punto x_0, l'approssima per difetto (per eccesso) se $x > x_0$, per eccesso (per difetto) se $x < x_0$ [6].

(6) Precisamente come avverrebbe per il polinomio intero di secondo grado, osculante la funzione reale $u(x)$ nel punto x_0, quando fosse, in A, $u'''(x) \geqq 0$ ($\leqq 0$). Ne segue, per esempio, che se, A contenendo l'intervallo $(x_0, +\infty)$, è, in A,

$$u(x_0) > 0 \quad , \quad u'''(x) + u'(x) < 0\,, \quad \text{per } x > x_0\,, \tag{*}$$

$$[u''(x_0)]^2 + [u'(x_0)]^2 > [u''(x_0) + u(x_0)]^2, \tag{**}$$

l'equazione $u(x) = 0$ possiede una radice maggiore di x_0, tale che, mentre la variabile ne attraversa il valore, la funzione $u(x)$ cambia di segno.

Si osserverà che se $u(x)$ è un polinomio intero, il sussistere delle sole diseguaglianze (*) basta ad assicurare l'esistenza di detta radice. Ma non è così in generale. Per esempio, per la funzione $u(x) \equiv e^{-x}$, sono soddisfatte le (*), per qualsivoglia punto x_0, ma l'equazione $u(x) = 0$ non ha radici, e la (**), conformemente a quanto abbiamo asserito, non è mai soddisfatta, pur essendo, per x_0 tendente all'infinito positivo, infinitesima la differenza fra i due suoi membri.