Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Cercignani

Sugli integrali impropri nel senso di Hadamard e su alcuni operatori ad essi collegati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.1, p. 39–44.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_39_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sugli integrali improprî nel senso di Hadamard e su alcuni operatori ad essi collegati.* Nota di CARLO CERCIGNANI, presentata (*) dal Corrisp. G. RICCI.

1. Si consideri lo spazio J_n ($n \geq 0$) delle funzioni $f(t)$ derivabili n volte, con derivata n–esima hölderiana su ogni intervallo finito dell'asse reale e tali che $(1 + t^2)^{-(n+1)/2} f(t) \in L(-\infty, +\infty)$.

Per tali $f(t)$ ha significato definire per ogni x reale il seguente integrale improprio nel senso di Hadamard (vedi per es. Guelfand e Chilov [1]):

$$(1)\quad \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{a} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt + \int_{a}^{b} \frac{\left\{f(t) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\right\}}{(t-x)^{n+1}}\,dt +$$

$$+ \int_{b}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!\,(n-k)!}\left[(b-x)^{k-n} - (a-x)^{k-n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \log\left|\frac{b-x}{x-a}\right|$$

ove a e b sono due qualsiasi numeri reali tali che $a < x < b$; Pf significa « parte finita ».

Si verifica che la definizione data è indipendente dalla scelta di a e b.

Si sono stabiliti i seguenti teoremi:

TEOREMA 1. – *Se $f \in J_n$ e inoltre ammette derivata $(n+1)$–esima hölderiana, allora l'integrale improprio* (1) *è derivabile rispetto a x e si ha:*

$$(2)\qquad \frac{d}{dx}\,\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt = (n+1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}}\,dt.$$

TEOREMA 2. – *Sia $z = x + iy$; se $y \to 0^{\pm}$, allora la funzione*

$$(3)\qquad \Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

analitica nei semipiani $\mathrm{Im}\, z \gtrless 0$, *tende uniformemente (rispetto a x) ai limiti:*

$$(3)\qquad \Phi^{\pm}(x) = \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt \pm \frac{\pi i}{n!} f^{(n)}(x).$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

TEOREMA 3. – *Se* $f \in J_{n+1}$ *e* $f' \in J_n$, *allora:*

$$(4) \qquad (n+1)\,\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+2}}\,dt = \mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt .$$

Facendo uso della (1), si sono introdotte le trasformate seguenti:

$$(5) \qquad H_n f \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{n!}{\pi i^{n+1}}\,\mathrm{Pf}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\,dt , \qquad f(t) \in J_n \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

Per $n = 0$ si ottiene, a meno di un fattore i, la trasformata di Hilbert (vedasi Titchmarsch [2]); per n dispari si ottengono casi particolari della trasformata di Riesz [3].

2. Come conseguenza dei teoremi precedenti si sono trovate le seguenti proprietà di H_n (a fianco sono indicate condizioni sufficienti di validità):

$$(6) \qquad H_{n+m} f = i^{-m} H_n \frac{d^m}{dx^m} f ; \qquad f \in K_{m,n}$$

$$(7) \qquad H_{n+m} f = i^{-m} \frac{d^m}{dx^m} (H_n f) ; \qquad f \in \left(\bigcap_{k=n}^{n+m} J_k\right)$$

$$(8) \qquad H_n \frac{d^m}{dx^m} f - \frac{d^m}{dx^m} H_n f = 0 ; \qquad f \in \left(\bigcap_{k=n}^{n+m} J_k\right) \cap K_{m,n}$$

$$(9) \qquad H_m f = i^{-m} H_0\left(\frac{d^m}{dx^m} f\right) ; \qquad f \in K_m$$

$$(10) \qquad H_m f = i^{-m} \frac{d^m}{dx^m} (H_0 f) ; \qquad f \in \left(\bigcap_{k=0}^{m} J_k\right).$$

In quel che precede $K_{m,n}$ indica lo spazio delle funzioni $f(x)$ che verificano le $(n+1)$ appartenenze seguenti:

$$f^{(k)} \in J_{n+m-k} \qquad (k = 0, 1, \cdots, m)$$

e $K_m \equiv K_{m,0}$. Si constata che le condizioni scritte a lato delle (6), (7), (8), sono verificate se $f(x)$ è $n+m$ volte derivabile con derivata $n+m$–esima hölderiana e tale che $f^{(h)}(x) \in L^{p_h}$ $(h = 0, 1, \cdots, n+m)$; in tal caso si scriverà

$$f \in L^{p}_{n+m} .$$

Si ha allora:

$$(11) \qquad H_m H_n f = i^{-(n+m)} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} f ; \qquad f \in L^{p}_{n+m} .$$

Si è dimostrato poi il seguente

TEOREMA 4. – *Siano* f *e* g *due funzioni definite sull'asse reale, ivi dotate delle prime* n *derivate, di cui la* n*–esima sia hölderiana; sia inoltre* $f^{(h)} \in L^{p_h}$, $g^{(n-h)} \in L^{q_h}$ $\left(q_h = \dfrac{p_h}{p_h - 1}\right)$. *Allora vale la relazione*

$$(12) \qquad (f, H_n g) = (H_n f, g)$$

in cui si è fatto uso della notazione

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx\,, \qquad (f \in L^p\,;\, g \in L^{p/(p-1)}).$$

Il teorema 4 è la giustificazione principale per l'introduzione della unità immaginaria nella definizione di H_n.

Di grande utilità è il

TEOREMA 5. – *Sia* $f(x) \in K_n$. *Allora si può effettuare una decomposizione* $f(x) = f^+(x) + f^-(x) + P(x)$, *tale che*

$$H_n f = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dx^n} f^+ - \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dx^n} f^-. \tag{13}$$

Le funzioni f^+ *e* f^- *sono limiti per* $\operatorname{Im} z \to 0^\pm$, *di funzioni analitiche, rispettivamente, nei semipiani* $\operatorname{Im} z > 0$ *e* $\operatorname{Im} z < 0$; $P(x)$ *è un polinomio di grado inferiore a* $n - 1$.

La formula (13) è la chiave per lo studio delle proprietà spettrali dell'operatore H_n in L^2. Si trova infatti, facendo uso del teorema 5, il seguente

TEOREMA 6. – *Gli operatori* H_n *hanno in* L^2 *uno spettro puramente continuo che ricopre tutto l'asse reale per n pari, il solo semi-asse positivo per n dispari. La rappresentazione spettrale di* N_n *è:*

$$H_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda^{(n)} \tag{14}$$

ove $E_\lambda^{(n)}$ *è la famiglia spettrale data da:*

$$E_\lambda^{(2m)} f = \frac{1}{4\pi m} \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{|\lambda'|^{\frac{2m-1}{2m}}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i(x' - x)\, |\lambda'|^{\frac{1}{2m}} \operatorname{sgn} \lambda'\right] f(x')\, dx' \tag{15}$$

$$E_\lambda^{(2m+1)} f = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(2m+1)} \displaystyle\int_{0}^{\lambda} \frac{d\lambda'}{|\lambda'|^{\frac{2m}{2m+1}}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left[(x' - x)\, |\lambda'|^{\frac{1}{2m+1}}\right] f(x')\, dx'\,; & (\lambda > 0) \\ 0 \quad ; & (\lambda < 0). \end{cases} \tag{16}$$

Riguardo al problema dell'inversione delle trasformate H_n, si ha il seguente

TEOREMA 7. – *Se* $g(t)(1 + t^2)^{(n-1)/2} \log(1 + t^2)$ *è integrabile è hölderiana su ogni intervallo dell'asse reale, allora la soluzione più generale dell'equazione*

$$H_n f = g \tag{17}$$

è data da

$$(18)\qquad f(x) = \frac{i^{n+1}}{\pi\,(n-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}(u-x)^{n-1}\log|x-u|\,g(u)\,du + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\,x^k$$

ove con $c_k\,(k = 0, 1, \cdots, n-1)$ *si sono indicate* n *costanti arbitrarie.*

Questo risultato si può applicare allo studio delle equazioni

$$(19)\qquad \mathrm{H}_n f = \lambda h(x) f(x) + a(x),$$

tra cui, in particolare, l'equazione omogenea

$$(20)\qquad \mathrm{H}_n f = \lambda h(x) f(x),$$

ottenendo il seguente

TEOREMA 8. – *Sia data l'equazione* (19) *accompagnata da condizioni accessorie su* $f(x)$, *tali che, se* $g(x) = \lambda h(x) f(x) + a(x)$, *scenda dalla* (17) *la* (18) *con le costanti* c_k *univocamente determinate da*

$$(21)\qquad c_k = \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,u^k\,du \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1)$$

(α_k *numero complesso assegnato, eventualmente nullo*); *sia poi nella* (19) $h(x)$ *una funzione reale di* x *di segno fissato, tale che*

$$(22)\quad k(x, u) = \left[\frac{i^{n+1}}{\pi\,(n-1)!}(u-x)^{n-1}\log|u-x| + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\,u^k\,x^k\right]\sqrt{h(u)\,h(x)}$$

sia un nucleo integrale a quadrato sommabile. Allora condizione necessaria e sufficiente affinché esista una soluzione della (19) *per ogni* $a(x) \neq 0$, *tale che* $b(x) \equiv \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{k(x, u)}{\sqrt{h(x)}}\,a(x)\,dx$ *esista e sia a quadrato sommabile, è che non esista soluzione della* (20). *In tali ipotesi le eventuali soluzioni della* (19) *o della* (20) *sono tali che esiste finito l'integrale* $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,|f(x)|^2\,dx$. *Inoltre gli eventuali valori di* λ *per cui l'equazione omogenea* (20) *ha soluzione non si possono accumulare intorno ad alcun punto al finito del piano complesso; formano quindi o un insieme finito o una successione infinita che tende all'infinito in modulo.*

Si ha anche il seguente risultato:

TEOREMA 9. – *Se, ferme restando le ipotesi del teorema* (10), *le costanti* α_k *che compaiono nella* (21) *sono reali, allora i valori di* λ *per cui l'equazione omogenea* (20) *ha soluzione sono reali e formano un insieme non vuoto.*

3. Si è poi studiata un'altra famiglia (a due parametri) di trasformate connesse con integrali improprî nel senso di Hadamard; essa fu considerata per la prima volta da Feller [4] ed è definita da:

$$\mathrm{I}_\delta^\alpha f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\sin\alpha\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,|\,t-x\,|^{\alpha-1} \sin\left[\alpha\,\frac{\pi}{2} + \alpha\delta\,\mathrm{sgn}\,(t-x)\right] dt. \tag{23}$$

Nel caso particolare $\delta = 0$ si ottiene la trasformata di Riesz [2]. Inizialmente, tali integrali sono da questi Autori definiti per $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$; poi per α al di fuori di tale semipiano, essi fanno uso del prolungamento analitico rispetto ad α (con opportune condizioni di regolarità su $f(t)$. Lo stesso risultato si può ottenere con definizioni analoghe alla (1).

Si è dimostrato, in contrasto con l'equazione $\mathrm{I}_\delta^{-2} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ scritta da Feller [4], che è $\mathrm{I}_\delta^{-2} f = -\cos 2\delta\,\dfrac{d^2 f}{dx^2} + i\sin 2\delta\,\mathrm{H}_0\left(\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right)$; anzi, più in generale si dimostra il seguente

TEOREMA 10. – *Per ogni* $f \in \mathrm{L}^p$ $(p > 1)$ (*e, per* $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$, *derivabile n volte con derivata n-sima hölderiana, ove* $n = [-\mathrm{Re}\,\alpha]$), *si ha la relazione:*

$$\mathrm{I}_\delta^\alpha f = \cos\alpha\delta\,\mathrm{I}^\alpha f + i\sin\alpha\delta\,\mathrm{H}_0(\mathrm{I}^\alpha f) \equiv e^{i\alpha\delta\mathrm{H}_0}(\mathrm{I}^\alpha f). \tag{24}$$

Facendo uso di tale risultato è immediato verificare la proprietà semigruppale

$$(\mathrm{I}_\delta^\alpha\,\mathrm{I}_\delta^\beta)\,f = \mathrm{I}_\delta^{\alpha+\beta} f \tag{25}$$

in quanto essa vale per gli operatori (commutabili) $e^{i\alpha\delta\mathrm{H}_0}$ e I^α.

Inoltre si dimostra facilmente il seguente

TEOREMA 11. – *Data l'equazione differenziale-operazionale:*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -\mathrm{I}_\delta^{-\alpha} u \qquad \left(\alpha > 0 \;,\; \alpha\,|\,\delta\,| < \frac{\pi}{2}\right) \tag{26}$$

e una funzione $w(x) \in \mathrm{L}^2$, *esiste una e una solo funzione* $u(x,t)$ *che soddisfa alla* (26) *e che tende in norma a* $w(x)$ *per* $t \to 0$. *Essa è data da:*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{K}_{\alpha,\delta}(x-\xi\,,\,t)\,w(\xi)\,d\xi \tag{27}$$

ove

$$\mathrm{K}_{\alpha,\delta}(q\,,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ipq - t\,|\,p\,|^\alpha e^{-i\alpha\delta\,\mathrm{sgn}\,p}\right] dp. \tag{28}$$

Di questo teorema Feller [4] dà una dimostrazione formale piuttosto complicata.

4. Infine, come applicazione dei risultati ottenuti, si è mostrato che la trattazione del problema dei livelli energetici dell'atomo d'idrogeno, ambientata nello spazio dei momenti, porta ad un'equazione del tipo (20). I teoremi 8 e 9 garantiscono l'esistenza di uno spettro discreto e il teorema 5 permette una risoluzione esplicita del problema, che fornisce gli autovalori in accordo col risultato ben noto.

Altri operatori connessi con gli operatori qui studiati sono stati considerati da Calderòn e Zygmund [5–6] negli spazi euclidei a m dimensioni e da Seeley [7] su varietà compatte. La trasformata di Riesz ed equazioni ad essa connesse sono state considerate anche da Bassam [8–9].

BIBLIOGRAFIA.

[1] I. M. GUELFAND e G. E. CHILOV, *Les Distributions*, Paris 1962.
[2] E. C. TICHMARSCH, *Introduction to the theory of Fourier integral*, Oxford 1948.
[3] M. RIESZ, *L'integrale de Riemann–Liouville et le problème de Cauchy*, « Acta Matematica », *81*, 1–222 (1949).
[4] W. FELLER, *On a generalization of Riesz's potentials and the semigroups generated by them*, « Medd. från Lunds Univ. Mat. Sem. », Supplement-band tillägnat M. Riesz.
[5] A. P. CALDERÒN e A. ZYGMUND, *On singular integrals*, « Am. Jour. of Math. », *78*, 289–309 (1956).
[6] A. P. CALDERÒN e A. ZYGMUND, *Singular integral operators and differential equations*, « Am. Jour. of Math. », *79*, 901–921 (1957).
[7] R. T. SEELEY, *Singular integrals on compact manifolds*, « Am. Jour. of Math. », *81*, 658–690 (1959).
[8] M. A. BASSAM, *Some properties of Holmgren–Riesz transform in two dimensions*, « Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa » (3), *16*, 75–90 (1962).
[9] M. A. BASSAM, *Concerning Holmgren–Riesz transform equations of Gauss–Riemann tipy*, « Rend. Circ. Mat. Palermo » (2), *11*, 47–66 (1962).