
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIULIO SUPINO

Sopra la possibilità di modelli geologici. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 38 (1965), n.1, p. 18–24.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_1_18_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria dei modelli. — *Sopra la possibilità di modelli geologici.*
Nota II^(*) del Corrisp. GIULIO SUPINO.

8. Riprendiamo le equazioni (6) della Nota precedente. Poiché in esse le variabili scelte sono adimensionali, così queste equazioni sussistono eguali nel modello e nel prototipo se $F = V^2/gl$ e $A = \eta V/\gamma l^2$ hanno lo stesso valore nell'uno e nell'altro caso.

Se consideriamo moti lenti (trascurando perciò Du/Dt , dV/Dt , Dw/Dt) e si suppone che le forze esterne dipendano dalla sola gravità ($F_s = -g$ perché z è diretta verso l'alto) le (6) divengono:

$$(6') \quad \frac{\partial p}{\partial x} - A \Delta_2 u = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} - A \Delta_2 v = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} - A \Delta_2 w = -1.$$

La semplificazione sarebbe senza interesse se si usasse lo stesso materiale nel modello e nel prototipo; infatti essa imporrebbe la condizione $\lambda\tau = 1$ (se le lunghezze vengono ridotte nella proporzione 1 a λ e i tempi nella proporzione da 1 a τ) e perciò ad una riduzione del tempo corrisponderebbe un aumento delle dimensioni del modello.

Se invece si è disposti a cambiare il materiale, allora (usando l'indice 1 per il prototipo e l'indice 2 per il modello) si trova la condizione

$$(11) \quad \frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \lambda \tau$$

(che è la condizione di Hubbert). Sembrerebbe che fosse necessario porre anche

$$p = \frac{p_1}{\gamma_1 l_1} = \frac{p_2}{\gamma_2 l_2},$$

e questa posizione ridurrebbe notevolmente p_2 ; dovrebbe infatti essere

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{l_2}{l_1}.$$

Ma in realtà p è definita a meno di una costante e questa può essere scelta in modo che su una superficie limite si abbia (nel modello e nel prototipo) lo stesso valore della pressione (o una differenza di pressione prefissata).

Scriveremo dunque

$$(12) \quad \frac{p_2 - C}{p_1} = \frac{\gamma_2 l_2}{\gamma_1 l_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \lambda$$

e fisseremo C in modo che sulla linea fissata $p_2 - C$ abbia il valore dato dalla (12) mentre la pressione effettiva agente è p_2 . La formula precedente cade in difetto se si chiede che su due linee corrispondenti (nel modello e nel prototipo)

(*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1964.

si debba avere la pressione atmosferica e se tale pressione si indica con zero (secondo l'uso dell'idraulica). Ma se si sceglie come valore zero della pressione il limite trazione-compressione (e se questo limite è esterno al campo che si considera) allora la formula (12) è utilizzabile, e p_2 può assumere un valore uguale (o non troppo discosto) dalla pressione atmosferica.

9. Se invece di considerare fenomeni di lento scorrimento dovuti alla sola gravità si considerano fenomeni lenti, ma dovuti anche ad altre forze di massa (F_x , F_y , F_z) allora le (6) si scrivono nella forma

$$(6'') \quad \frac{\partial p}{\partial x} - A \Delta_2 u = \frac{F_x}{g}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - A \Delta_2 v = \frac{F_y}{g}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - A \Delta_2 w = \frac{F_z}{g} - 1$$

e ciò esige che F_x , F_y , F_z restino invariate nel modello e nel prototipo.

Vediamo ora cosa accade per le tensioni interne.

Se nelle (3) si effettuano le sostituzioni rappresentate dalle (5) si ottiene:

$$\sigma_x = \gamma_1 l_1 p - 2 \eta_1 \frac{V_1}{l_1} \frac{\partial u}{\partial x} \dots$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\eta_1 V_1}{l_1} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Pertanto

$$\frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}} = \frac{\gamma_2 l_2}{\gamma_1 l_1} \frac{p - \frac{2 V_2 \eta_2}{\gamma_2 l_2^2} \frac{\partial u}{\partial x}}{p - \frac{2 V_1 \eta_1}{\gamma_1 l_1^2} \frac{\partial u}{\partial x}}.$$

Ma sappiamo già che $\frac{V_2 \eta_2}{\gamma_2 l_2^2}$ è un numero puro (uguale perciò nel modello e nel prototipo) quindi

$$(13) \quad \frac{\sigma_{x2}}{\sigma_{x1}} = \frac{\gamma_2 l_2}{\gamma_1 l_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \lambda.$$

Analoga relazione si ricava subito per le τ e perciò anche per le relazioni ai ai limiti. La (13) vale a condizione che nella (12) si ponga $C = 0$. In ogni caso, volendo determinare le σ del prototipo date quelle del modello dovremo perciò togliere dalle p_2 la costante C e poi passare alla σ_{x2} ; da questa si risale alla σ_{x1} . Anche il passaggio inverso è immediato.

10. Le osservazioni precedenti ci pongono in condizioni di eseguire esperienze su modello in problemi di geologia. E queste esperienze dovrebbero metterci in condizione di verificare sotto l'azione di quali distribuzioni di forze si sono svolte quelle dislocazioni di rocce delle quali conosciamo la situazione finale e presumiamo una data situazione iniziale.

Di fronte a questa posizione può essere utile costruire un *modello inverso*; cioè un modello nel quale si assume come iniziale la situazione finale (che è

conosciuta), si applicano ad esso in ogni punto risultanti uguali ed opposte a quelle che si ritiene abbiano agito nel tempo e si controlla se la situazione finale corrisponde a quella che si ritiene esistesse all'inizio del dislocamento.

L'utilità del modello inverso (che ritengo proposto qui per la prima volta) risulta da due elementi fondamentali:

1° che è conosciuto lo stato finale (come si è detto) mentre quello iniziale è soltanto supposto. Si potranno dunque applicare sistemi di forze differenti allo stato finale noto e controllare quale sia il sistema che porta allo stato iniziale previsto (e se tale sistema può avere agito effettivamente);

2° che non è detto che il moto, quale si è svolto nei secoli, sia un moto *stabile*, cioè non sappiamo se due configurazioni iniziali fra loro vicine diano luogo a distribuzioni finali pure vicine. Potrebbe essere che piccole differenze nelle distribuzioni delle forze iniziali dessero luogo a differenze sensibili nello stato finale. In tale condizione le differenze sarebbero invece attenuate passando dallo stato finale a quello iniziale e pertanto il numero di esperienze di tentativo che si debbono fare per passare dallo stato finale a quello iniziale sarebbe assai minore di quello che sarebbe necessario nel caso inverso.

11. Contro il concetto di modello inverso può essere sollevata qualche obiezione. Si può infatti rilevare che quando una massa visco-plastica si muove sotto l'azione di certe sollecitazioni esterne (cui corrispondono determinate tensioni interne) non è affatto certo che invertendo il segno delle sollecitazioni (e quindi delle tensioni) il comportamento della massa in esame resti lo stesso. Vi sono per esempio corpi che sopportano sforzi di compressione molto notevoli, mentre si rompono sotto azioni di trazione assai limitate.

Ma questa obiezione può essere rimossa senza troppa difficoltà tenendo conto che in un modello geologico si deve usare un materiale differente da quello del prototipo. Nel modello inverso dovremo quindi scegliere un materiale che si comporti a compressione nello stesso modo come si comporta a trazione. Un modello inverso effettuato con tale materiale funziona correttamente; soltanto non sarà possibile fissare a priori la viscosità voluta e occorrerà limitarsi a stabilire l'ordine di grandezza della viscosità; con questo valore sceglieremo il materiale adatto, ne determineremo con precisione la viscosità (alla pressione d'esperienza) ⁽⁶⁾, e costruiremo poi il modello in base alle relazioni (11), (12) del n. 8.

12. A titolo di esempio prendiamo in esame la teoria relativa ai duomi salini. In essa si afferma che tali duomi si sono formati per differenza di densità tra salgemma e calcare soprastante. Se essa è vera, rovesciando il modello (cioè ponendo in basso il calcare ed in alto il salgemma che è meno denso del

(6) Come è ben noto la viscosità varia con la pressione. Occorre perciò conoscere la pressione con la quale hanno agito le forze nel prototipo (per valutare la viscosità che allora avevano le rocce) e la pressione del modello (per stabilire la viscosità del materiale del modello).

calcare) il duomo dovrebbe sparire e si dovrebbero ripresentare gli strati orizzontali. Se ciò non accadesse sarebbe da ritenere che la formazione dei duomi fosse dovuta ad altra causa.

Ritorniamo in seguito su questo argomento; qui vogliamo rilevare un altro vantaggio del modello inverso. I duomi salini hanno spesso delle irregolarità dovute, ritengo, alla differente resistenza nelle varie zone di uno stesso strato di calcare (la cui viscosità cambia con la pressione e la temperatura). Orbene nel modello inverso queste accidentalità secondarie spariscono: qualunque sia la sezione (verticale) iniziale sempre si tornerà agli strati orizzontali (se la teoria è vera) e si potrà così mettere in rilievo che le irregolarità sono dovute a fatti secondari riconducibili alla stessa causa fondamentale (differenza di densità) anche se collegata con una seconda causa meno appariscente (differenza di resistenza nel calcare.)

13. Allo scopo di chiarire le idee su determinati fenomeni si può anche ricorrere a modelli « ideali » cioè a modelli che non si pensa di realizzare, ma soltanto di discutere a tavolino.

Sia data una pila di strati calcarei nella quale si osservano delle pieghe del tipo di quelle indicate nella fig. 1. La lunghezza della piega sia di 10 km

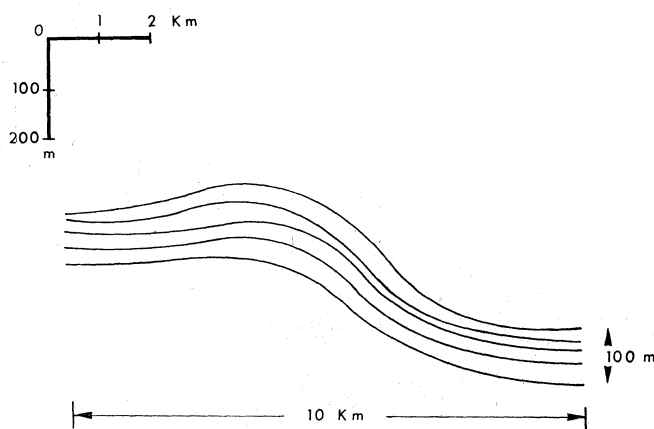


Fig. 1.

e la pila di strati sia alta 100 m. Si può adottare una scala delle lunghezze $\lambda = 10^{-5}$ (con che il modello ha una lunghezza di 10 cm e lo spessore della piega è di 1 mm).

Si domanda se è possibile che il fenomeno si sia svolto in 10 milioni di anni.

Se si pensa di costruire un modello nel quale il fenomeno debba svolgersi in un'ora avremo

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} 10^{-5} \cdot \frac{1}{876} 10^{-8} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} 1,14 \cdot 10^{-16}$$

ed essendo $\eta_1 = 10^{21}$ e $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ uguale almeno a 0,5 risulterebbe

$$\eta_2 = 0,57 \cdot 10^5.$$

Questo risultato mostrerebbe che il fenomeno *non* si è potuto svolgere nel tempo fissato alla pressione e alla temperatura ordinarie. Ma se si potesse ritenere che il fenomeno si sia svolto per esempio alla pressione di 10.000 atmosfere allora la viscosità della roccia sarebbe stata $\eta_1 \approx 10^{15}$, quindi $\eta_2 = 0,057$

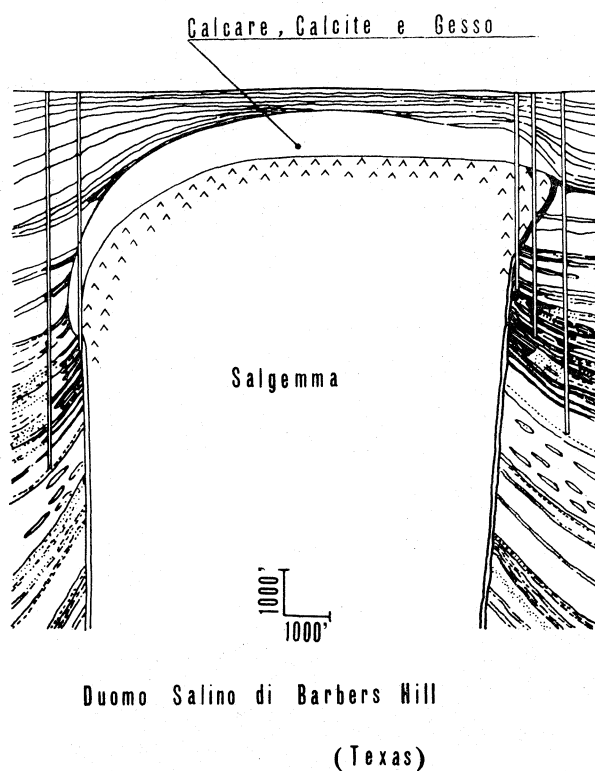


Fig. 2. - (Dal *Nadai-Theory of Flow and Fracture of solids*, Mc Graw-Hill, 1963).

(se il fenomeno nel modello si svolge in un'ora). Ma la viscosità dell'olio di oliva è maggiore di questa ($\eta = 0,989$ a 15°C) e pertanto con la pressione ammessa il fenomeno avrebbe potuto svolgersi anche in un tempo inferiore ad un milione di anni.

Un modello « ideale » potrebbe anche essere quello relativo ad un duomo salino. Tutto il fenomeno si è qui svolto, secondo le opinioni dei geologi, in 24 milioni di anni.

Ora il duomo salino della fig. 2 ha una base di circa 2500 m e un'altezza notevolmente maggiore. Si può dunque adottare la scala delle lunghezze

$\lambda = 4 \cdot 10^{-5}$ ottenendo un modello con sezione orizzontale di circa 20 cm (se vogliamo includere una parte del rivestimento laterale calcareo).

Quanto ai tempi se vogliamo ridurre ad un'ora il tempo di 24 milioni di anni (pari a $2,1 \cdot 10^{11}$ ore) dovremo porre $\tau = 4,76 \cdot 10^{-12}$ e quindi è

$$\begin{aligned}\frac{\eta_2}{\eta_1} &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot 4 \cdot 10^{-5} \cdot 4,76 \cdot 10^{-12} \\ &= \frac{\gamma_2}{\gamma_1} 19,04 \cdot 10^{-17}.\end{aligned}$$

Poiché la densità del salgemma è $\gamma_1 = 2,1 \text{ gr/cm}^3$ così si può supporre

$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \approx 0,5$. Segue allora

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = 9,52 \cdot 10^{-17}$$

e poiché la viscosità del salgemma a 18°C è circa $2 \cdot 10^{18}$ così risulta

$$\eta_2 = 190,4 \text{ poise.}$$

Per il calcare (essendo $\eta_1 = 10^{21}$) si avrebbe invece

$$\bar{\eta}_2 = 9,52 \cdot 10^4 \text{ poise.}$$

Si osservi ora che si potrebbe costruire per il duomo salino un modello inverso. Esso consisterebbe in una tazza esterna (costituita dal materiale sostitutivo del calcare con viscosità $\bar{\eta}_2$) ripiena del materiale sostitutivo del salgemma (con viscosità $\eta_2 = 190$ poise) cioè da un materiale con la viscosità di uno sciroppo ⁽⁷⁾.

L'esame di questo modello inverso mostra subito che per quanto si riferisce ad η_2 si potrebbe certo, in un'ora, arrivare ad avere una stratificazione orizzontale, ma che è assai dubbio ciò possa accadere per il materiale sostitutivo del calcare. E si osserverà che il moto è comandato dal materiale a viscosità più forte; se la tazza non si appiattisce il materiale interno non può a sua volta distendersi. Se dunque eseguendo effettivamente la esperienza con un materiale con viscosità $\bar{\eta}_2$ si osservasse che in un'ora esso non modifica sensibilmente la sua struttura dovremmo concludere che il fenomeno si è svolto in un tempo più lungo, oppure che le condizioni di temperatura e di pressione hanno modificato la viscosità del calcare. Per quello che si riferisce al salgemma è invece certo che il fenomeno può essere svolto (col materiale sostitutivo) in un'ora.

La esperienza mostra anche un altro vantaggio del modello inverso. Con la riduzione molto forte delle scale si può passare da un solido ad un liquido. Ma mentre due solidi non mutano la loro posizione reciproca per

(7) Se si eseguisse effettivamente il modello, occorrerebbe che lo «sciroppo» avesse densità e livello tale sopra la tazza che le azioni esercitate in ogni punto della superficie di separazione risultassero ridotte nella scala delle tensioni rispetto a quelle agenti nel prototipo (e di segno opposto – come è ovvio).

lungo tempo anche se quello superiore ha densità maggiore di quello inferiore, invece due liquidi danno luogo a instabilità se il superiore è più denso dell'inferiore. Col modello inverso si ovvia dunque anche a questo inconveniente.

14. È ovvio che su un modello si possono affrontare soltanto alcuni problemi di geologia. Non è possibile affrontare quei problemi nei quali il materiale cambia di stato, o quelli nei quali la temperatura e la pressione intervengono non soltanto per modificare il valore della viscosità o quello della densità ma anche per alterare il carattere del materiale (come accade per esempio nei fenomeni di ricristallizzazione).

Vi è di più. Il modello geologico (non soltanto quello inverso ma anche quello diretto) pur essendo costruito rispettando la similitudine geometrica, tuttavia è formato con materiale diverso e si comporta probabilmente in modo differente da quello del prototipo (trattandosi sempre in questo di materiali soltanto mediamente omogenei e considerandosi viscosità e densità medie); quello che lega prototipo e modello (sia *diretto* che *inverso*) è il fatto che essi soddisfano allo stesso tipo di equazioni; modello diretto e modello inverso rappresentano dunque dei *modelli analogici* del prototipo (nello stesso senso col quale, per esempio, si chiama analogico un modello elettrico per lo studio di acque filtranti).