
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

PASCAL DUPONT

Studio critico del concetto di velocità istantanea in Galileo

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.6, p. 420–423.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_420_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Studio critico del concetto di velocità istantanea in Galileo.* Nota di PASCAL DUPONT, presentata (*) dal Socio B. FINZI (**).

I. Viene comunemente affermato che il «grado di velocità» in Galileo coincide con la nostra «velocità istantanea». Una tale affermazione ⁽¹⁾ non è accettabile, se non sotto talune ipotesi restrittive che però non vengono ovviamente enunciate da Galileo. È perciò interessante indagare quali di tali ipotesi, fra le più semplici e spontanee, ci si potrebbe permettere di attribuire a Galileo. La presente Nota ha per oggetto una simile indagine.

È fondamentale, in questo lavoro, l'osservazione che: *se un punto materiale P percorre una traiettoria rettilinea con moto uniforme, la «velocità galileiana» di P è costante e coincide con la «velocità» costante di P, come viene da noi definita* ⁽²⁾. Il problema si pone pertanto solo se il moto di P, sulla traiettoria rettilinea, è vario.

Sia $s = s(t)$ l'equazione del moto di P, con la convenzione $s(0) = 0$. Immaginiamo di voler studiare il moto di P per $t > 0$. Secondo Galileo, il «grado di velocità», diciamo $v(t_0)$, di P in un istante t_0 , è la velocità costante che avrebbe P, da t_0 in poi, in quel certo *moto fittizio* $s = s^*(t)$ identificantesi col moto $s = s(t)$ per ogni $t \leq t_0$ e che «continui a muoversi» in modo uniforme da t_0 in poi ⁽³⁾. Ma che significa, in un simile enunciato, l'espressione «continuare a muoversi»? In mancanza di chiarimenti e precisazioni, si potrebbe essere tentati di rispondere: significa «possedere all'istante iniziale t_0 del moto uniforme, la posizione $s^*(t_0)$ coincidente con quella finale $s(t_0)$ del moto reale in questione nell'intervallo $(0, t_0)$, e la velocità costante (per $t > t_0$) uguale al grado di velocità $v^*(t_0)$, che coincide con quello $v(t_0)$ finale del detto moto reale».

È evidente che una tale interpretazione non è accettabile, risolvendosi in un banale giro di parole: sarebbe una petizione di principio ricorrere al

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo n. 25 del Consiglio Naz. Ricerche (Comitato per la Matematica).

(1) Cfr. p. 751 di GALILEO GALILEI, *Discorsi... intorno a due nuove scienze*, a cura di A. CARUGO e L. GEYMONAT, Boringhieri, Torino.

(2) È opportuno però osservare che Galileo non definisce mai esplicitamente il concetto «velocità». All'inizio della terza giornata dei *Discorsi*, troviamo una definizione rigorosa di moto uniforme, seguita da quattro assiomi, nel terzo dei quali incontriamo la parola velocità, del cui significato non si fa cenno. Tuttavia, dai *Discorsi* (in particolare dai primi sei teoremi della terza giornata) il concetto di velocità risulta implicitamente definito con sufficiente chiarezza per i moti uniformi e s'identifica con il nostro, salvo, al più sotto l'aspetto dimensionale.

(3) Cfr. (VII, 46) (7° volume delle opere galileiane, edizione nazionale, p. 46): «grado di velocità, che, se avesse continuato di muoversi con quello senza più accelerarsi...».

moto fittizio per *definire* $v(t_0)$, quando quel moto non potesse essere caratterizzato che da $v(t_0)$ stesso. Occorre andare più a fondo.

Ci sembra di aderire assai strettamente al pensiero di Galileo, accettando la «velocità galileiana» $v = v(t)$ d'un moto reale $s = s(t)$, come un'idea primitiva, e considerando il moto fittizio $s = s^*(t)$ come un'entità ausiliaria da introdursi per calcolare effettivamente il «grado di velocità» $v(t_0)$.

Ammettere l'esistenza della funzione-idea primitiva $v(t)$, significa prendere in esame soltanto quei moti per i quali noi ammettiamo la derivabilità della $s = s(t)$. È lecito presumere che proprio per questi moti, e per questi soli, Galileo ammettesse implicitamente, a fianco della $s(t)$, una funzione $v = v(t)$, funzione che, in ultima analisi, noi vogliamo dimostrare indentificantesi con la $s'(t)$, proponendoci all'uopo di dimostrare che risulta $s'(t_0) = v(t_0)$.

La dimostrazione, come vedremo, sarà resa possibile dalla fondamentale ammissione che $v(t)$ sia una funzione continua per ogni $t \geq 0$. Quest'ammissione è del tutto spontanea e in piena armonia con tutto il pensiero galileiano, apparendo il principio: «natura non facit saltus» come un aforisma ovviamente sottinteso cui ogni fenomeno reale debba necessariamente soddisfare (4). Altro ci sembra doversi dire (si ricordi che Galileo è più un fisico che un matematico!) dei moti che abbiamo chiamati «fittizi»: non è affatto evidente che un moto immaginario $s = s^*(t)$, che idealmente prosegua il moto reale in modo uniforme, a partire dall'istante t_0 , goda della proprietà che $s^*(t)$, pur essendo continua in ogni $t \geq 0$, e pur essendo derivabile in ogni $t \geq 0$ che sia $\neq t_0$, risulti derivabile anche in t_0 .

Orbene è precisamente questo che vogliamo dimostrare: che la $s^*(t)$, sotto le ipotesi precedenti, è derivabile in t_0 , cioè che esiste necessariamente $s'(t_0)$, che potrà poi essere assunto, per *definizione*, come grado di velocità $v(t_0)$; la derivabilità in t_0 di $s^*(t)$ dovrà dunque dimostrarsi sotto le ipotesi della continuità per $t \geq 0$ di $s^*(t)$, della sua derivabilità per $t \geq 0$, $t \neq t_0$, e della continuità, per $t > 0$, della $v(t)$.

2. Indichiamo con J l'insieme di tutte le funzioni $v = v(t)$ sul semiasse $t \geq 0$, ivi continue. Supponiamo poi che J sia in corrispondenza biunivoca con un certo altro insieme I di funzioni $s = s(t)$, sul semiasse $t \geq 0$, derivabili e tali che $s(0) = 0$. Fissiamo infine un qualunque istante $t_0 > 0$ e ampliamo J con l'aggiunta di tutte le funzioni $v^*(t)$ che, per $0 \leq t \leq t_0$, coincidono con

(4) Per esempio la definizione galileiana del moto uniformemente accelerato implica un accrescimento continuo della velocità, ossia implica che «il corpo passi per tutti i gradi di velocità e di tardità» (cfr. p. 757, loc. cit. nota 1). La teminologia usata spesso da Galileo, per esempio nel *De motu naturaliter accelerato* della Giornata terza dei *Discorsi* (p. 178, loc. cit., nota 1) è quella propria della fisica medioevale: *intensio* indica il grado di perfezione di una qualità o proprietà (calore, velocità ecc.) e come tale varia con continuità. Ed ancora: non dimentichiamo uno dei titoli di gloria di Galileo, l'aver ammesso cioè un passaggio continuo dal riposo al movimento [cfr. Giornata prima del *Dialogo*, dove dimostra che «il mobile partendosi dalla quiete passa per tutti i gradi di velocità senza dimorare in veruno» (VII, 46)].

una $v(t) \in J$, mentre per $t > t_0$, si mantengono costanti (potendo peraltro esser discontinue in t_0).

Corrispondentemente ampliamo I con l'aggiunta di tutte le funzioni $s^*(t)$, continue per $t \geq 0$, che coincidono con le $s(t) \in I$ per $t \leq t_0$, mentre per $t > t_0$ si mantengono lineari.

Indichiamo con $J(t_0)$ l'insieme ottenuto dall'ampliamento di J , con $I(t_0)$ quello ottenuto dall'ampliamento di I , ed osserviamo che la corrispondenza biunivoca $I \leftrightarrow J$, ammessa per ipotesi, si prolunga ovviamente in una corrispondenza biunivoca $I(t_0) \leftrightarrow J(t_0)$, quando si convenga che ad ogni $s^*(t) \in I(t_0)$, corrisponda quella $v^*(t)$ uguale, per $t > t_0$, ad $s^{*'}(t_0)$ (costante), e necessariamente a $v(t)$ per $0 \leq t \leq t_0$.

La proprietà, supposta per la $s(t)$, di possedere la derivata $s'(t)$ ovunque sul semiasse $t \geq 0$, è l'espressione analitica del fatto che il punto P , animato dal moto $s = s(t)$, possiede, per $t \geq 0$, una « velocità » nell'accezione moderna del termine; analogamente possiamo interpretare il pensiero galileiano associando alla $s(t)$ una funzione $v(t)$ che chiamiamo « velocità galileiana ». Il valore $v(t_0)$ di tale velocità all'istante t_0 è il « grado di velocità » galileiano che risulta, sotto le condizioni poste, uguale alla *nostra* velocità istantanea $s'(t_0)$, come vedremo. Di qui seguirà quindi generalizzando: $s'(t) = v(t)$. La funzione $v(t)$, che in questa Nota vogliamo chiamare « velocità galileiana », pur non essendo a priori definita come derivata $s'(t)$ della $s(t)$, non è cinematicamente slegata dalla corrispondente $s(t)$. Ci sembra che sia possibile, in armonia con il pensiero galileiano ⁽⁵⁾, caratterizzare, dal punto di vista cinematico, la corrispondenza $I(t_0) \leftrightarrow J(t_0)$ con la seguente proprietà assai semplice e riflettente quanto di più spontaneamente intuitivo vi è nel concetto di velocità nel suo stadio embrionale:

(G) *se, in un intervallo (t', t'') (con $0 \leq t' < t''$), due funzioni $v_1(t)$, $v_2(t)$ di $J(t_0)$ soddisfano sempre alla limitazione $v_1(t) < v_2(t)$, allora per gli incrementi $\Delta s_1 = s_1(t'') - s_1(t')$, $\Delta s_2 = s_2(t'') - s_2(t')$ delle $s_1(t)$ ed $s_2(t)$ corrispondenti in $I(t_0)$, si ha $\Delta s_1 < \Delta s_2$.*

3. Nelle ipotesi fatte al n. 2, fissata una funzione $s(t)$ in I , considerate tutte le $s^*(t)$ e $v^*(t)$ che ad essa possono essere associate, possiamo dimostrare molto semplicemente la seguente proposizione di analisi: *alla particolare $v^*(t)$ continua in t_0 corrisponde, nella $I(t_0) \leftrightarrow J(t_0)$, la $s^*(t)$ derivabile in t_0 , e quindi tale che $s^{*'}(t_0) = v^*(t_0) = s'(t_0)$.*

Per la dimostrazione, detta $v_0(t)$ la particolare $v^*(t)$ in discorso, ed $s_0(t)$ la $s^*(t)$ corrispondente, per ogni numero positivo η , alle funzioni del tipo $v^*(t)$

(5) Nel *Dialogo* SALVIATI (GALILEO) dice: « quando voi v'immaginate un mobile esser più veloce d'un altro, che concetto vi figurate voi nella mente »? (VII, 48) e la risposta di Simplicio: « Figuromi, l'uno passar nell'istesso tempo maggior spazio dell'altro, o vero passar spazio eguale, ma in minor tempo » soddisfa pienamente Salviati. In questa fase dell'evoluzione galileiana, la velocità è ancora concetto assai vago e s'affacciano problemi di confronti di velocità.

definite, per $t > t_0$, come segue: $v_1 = v_0 + \eta$, $v_2 = v_0 - \eta$, corrispondono due funzioni del tipo $s^*(t)$, rispettivamente, per $t > t_0$: $s_1 = s_0(t) + \eta(t - t_0)$, $s_2 = s_0(t) - \eta(t - t_0)$. Per la continuità della $v(t)$ e per la proprietà (G) inoltre, segue che, in un conveniente intorno destro di t_0 , sarà $s_1 > s > s_2$; il grafico di $s_0(t)$ è perciò tangente in t_0 ad $s(t)$ e con ciò il teorema è dimostrato.

Come si vede, la coincidenza del «grado di velocità» galileiano con la nostra «velocità istantanea» si dimostra senza attribuire a Galileo speciali poteri divinatori, ma semplicemente attribuendogli la paternità delle due ipotesi: della continuità della «velocità galileiana» e quella espressa dall'enunciato (G).

Vale anche la pena d'osservare una differenza fondamentale di metodo, fra Galileo e noi. Per noi la velocità, essendo il limite del rapporto incrementale, viene definita in ogni singolo istante: la sua definizione è cioè *locale*: da essa si deduce la velocità funzione del tempo per generalizzazione. Per Galileo, invece, quella che abbiamo chiamato «velocità galileiana» (se l'analisi critica da noi fatta sopra merita qualche attendibilità) viene concepita come funzione, cioè funzione $v(t)$ in *grande* del tempo, dalla quale poi si definisce il «grado di velocità» corrispondente alla nostra «velocità istantanea».