
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANTONELLO RUBATTA

Inizio del trasporto solido per azione del moto ondoso

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.6, p. 412–419.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_412_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Inizio del trasporto solido per azione del moto ondoso*^(*). Nota di ANTONELLO RUBATTA, presentata^(**) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. Un fondo piano, incoerente viene modellato dalla azione delle onde solo se le tensioni tangenziali τ esercitate su di esso dalla massa liquida in moto superano un certo valore critico, specifico del particolare materiale che lo sostituisce, e dipendente eventualmente anche dal periodo T dell'onda.

Per analogia con quanto è consuetudine fare nel caso delle correnti permanenti, si può introdurre anche qui una velocità di attrito del tipo

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

ad indicare l'intensità dell'azione idrodinamica esercitata sul fondo, e si può ricorrere al diametro d ed alla velocità limite w di caduta libera per rappresentare i granelli fermanti il fondale. Naturalmente sia V_* che w sono legati alla viscosità cinematica ν ed alla densità ρ del fluido.

Complessivamente, il fenomeno dipende dunque dalle sei grandezze

$$d, w, V_*, T, \nu, \rho$$

e l'analisi dimensionale, una volta assunte

$$d, \nu, \rho$$

come fondamentali, permette di stabilire che in condizioni di inizio del movimento al fondo deve sussistere una relazione del tipo

$$\varphi\left(\frac{wd}{\nu}, \frac{V_*}{w}, \frac{d}{\sqrt{\nu T}}\right) = 0.$$

Essa va precisata ricercando il legame fra V_* ed i parametri esterni dell'onda, quali la massima sopraelevazione A del pelo libero sul livello di riposo, il periodo T o la pulsazione $k = \frac{2\pi}{T}$, la lunghezza d'onda λ oppure il numero d'onde $m_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$, e la profondità media H . Occorre inoltre individuare la natura della dipendenza funzionale rappresentata da φ .

Con questa Nota introduttiva ci si propone di iniziare lo studio del problema generale ora delineato, esaminando il caso particolare delle onde laminari svolgentesi su fondo liscio, o più precisamente su fondo costituito da particelle di dimensioni limitate rispetto alla lunghezza $\sqrt{\nu T}$.

(*) Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

Parte del programma può essere completata per via teorica, in quanto V_* può essere dedotta dalla teoria delle onde di liquido viscoso in profondità finita. Per la ricerca della dipendenza φ ci si dovrà basare invece su fatti sperimentali. Si mostrerà così che il criterio che individua le condizioni di inizio dei movimenti di fondo per azione delle onde si identifica con il noto criterio di Shields per l'analogo fenomeno di moto permanente, a patto di costruire la velocità di attrito V_* con il valore \bar{v} medio nel tempo e nello spazio delle tensioni tangenziali al fondo.

2. Un moto ondoso piano di piccola ampiezza svolgentesi in liquido viscoso su fondo orizzontale è descritto dalla funzione di corrente ⁽¹⁾

$$\psi = \frac{Ak}{m_0 \text{Sh } m_0 H} e^{-i[(m_0 + m_1 \sqrt{v})x_0 - kt]} \cdot \left\{ \text{Sh } m_0 y_0 + \sqrt{v} \left[\left(m_1 y_0 - \frac{m_0}{b_0} \right) \text{Ch } m_0 y_0 + \frac{m_0}{b_0} e^{-\frac{b_0 y_0}{\sqrt{v}}} \right] \right\},$$

in cui

$$m_1 = (1 - i) \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{m_0^2}{2 m_0 H + \text{Sh } 2 m_0 H}$$

$$b_0 = (1 + i) \sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Dalla ψ si deduce subito l'andamento delle velocità orizzontali u presso il fondo. Il loro modulo vale intanto

$$|u| = \sqrt{\frac{\partial \psi}{\partial y_0} \cdot \frac{\partial \psi^*}{\partial y_0}} = \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H} \cdot \sqrt{\text{Ch}^2 m_0 y_0 - 2 e^{-\sqrt{\frac{k}{2v}} y_0} \text{Ch } m_0 y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{2v}} y_0 + e^{-2\sqrt{\frac{k}{2v}} y_0}}$$

e risulta massimo ad un'altezza

$$y_0 = \delta = 3,23 \sqrt{\frac{v}{k}} = 1,29 \sqrt{vT},$$

che viene assunta convenzionalmente a rappresentare lo spessore dello strato limite. Il massimo in questione vale

$$|u|_{y_0=\delta} = 1,07 \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H}.$$

Ad altezze maggiori sul fondo il modulo della velocità orizzontale tende rapidamente ad un minimo relativo

$$|u| = U_0 = \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H}$$

per crescere poi di nuovo procedendo verso il pelo libero.

(1) A. RUBATTA, *Onde di liquido viscoso in profondità finita*, « Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei », gennaio 1964.

Il massimo per il modulo della velocità che si presenta al termine dello strato limite viene ovviamente assunto anche dalla velocità

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_0} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y_0} \right) = \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H} \cdot$$

$$\left\{ \text{Ch } m_0 y_0 \cos(m_0 x_0 - kt) - e^{-\sqrt{\frac{k}{2\nu}} y_0} \cos\left(m_0 x_0 - kt + \sqrt{\frac{k}{2\nu}} y_0\right) \right\}$$

in istanti opportuni, ad esempio quando $m_0 x_0 - kt = 0,0719$; ma in questi istanti la u non è massima in tutto lo spessore dello strato limite. In particolare

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} = \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H} \sqrt{\frac{k}{\nu}} \cos\left(m_0 x_0 - kt - \frac{\pi}{4}\right)$$

raggiunge il suo valore più elevato

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} = \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H} \sqrt{\frac{k}{\nu}} = \frac{1}{0,40} \frac{U_0}{\sqrt{\nu T}}$$

quando $m_0 x_0 - kt = \frac{\pi}{4}$ a meno di multipli di 2π .

Un'idea più completa della distribuzione della velocità orizzontale in prossimità del fondo è fornita dalle curve di fig. 1, relative agli istanti per cui $m_0 x_0 - kt = 0,0719$ o $m_0 x_0 - kt = \frac{\pi}{4}$, e dalla curva involuppo $|u|/U_0$.

Disponendo dei risultati ora raccolti riesce immediato il calcolo dello sforzo tangenziale τ esercitato sul fondo dalla massa d'acqua in moto. Se si indica con η la viscosità dinamica, si ottiene infatti

$$\tau = \eta \left| \frac{\partial u}{\partial y_0} \right|_{y_0=0} = \eta \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H} \sqrt{\frac{k}{\nu}} \cos\left(m_0 x_0 - kt - \frac{\pi}{4}\right)$$

e quindi la τ oscilla con la pulsazione dell'onda e con ampiezza massima pari a

$$\tau_{\max} = \frac{\eta}{0,40} \frac{U_0}{\sqrt{\nu T}}$$

Inoltre, il valor medio della τ nel tempo e nello spazio, valutato sui semi-periodi corrispondenti, risulta essere

$$\bar{\tau} = \frac{2}{\lambda} \frac{2}{T} \int_{\frac{\pi}{4k} + \frac{m_0 \alpha}{k}}^{\frac{\pi}{4k} + \frac{m_0 \alpha}{k} + \frac{T}{2}} \left(\int_{\alpha}^{\alpha + \frac{\lambda}{2}} \tau dx_0 \right) dt = \frac{4}{\pi^2} \eta \frac{Ak}{\text{Sh } m_0 H} \sqrt{\frac{k}{\nu}}$$

e si può quindi adottare la velocità di attrito

$$V_* = \sqrt{\frac{\bar{\tau}}{\rho}} = 1,01 \sqrt{U_0} \sqrt[4]{\frac{\nu}{T}}$$

per rappresentare l'intensità media dell'azione idrodinamica alla quale è soggetto il fondo.

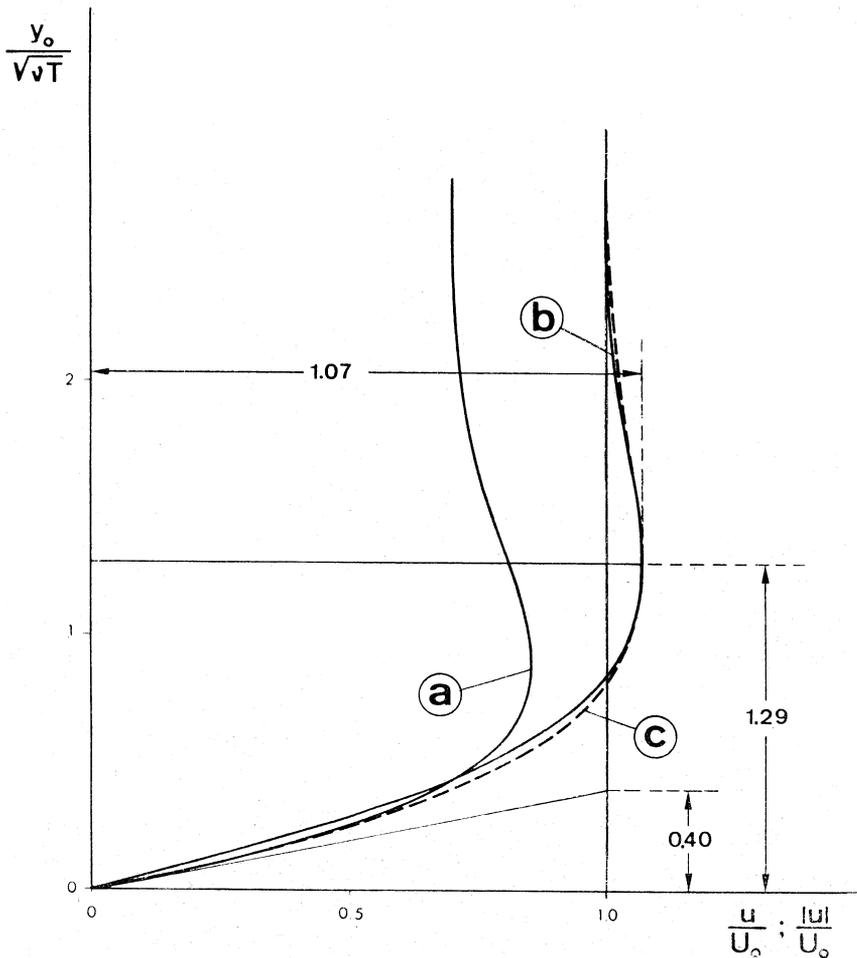


Fig. 1. - Velocità orizzontali presso il fondo.

a) velocità relative, nell'istante in cui è massima la tensione al fondo; b) velocità relative, nell'istante in cui è massima la velocità al termine dello strato limite convenzionale; c) modulo delle velocità orizzontali relative.

3. Resta ora da individuare la natura del legame esistente all'atto iniziale di moto del sedimento fra i numeri di Reynolds e di Froude per la situazione al fondo

$$Re_* = \frac{wd}{\nu} \quad , \quad Fr_* = \frac{V_*}{w}$$

ed il rapporto del diametro d delle particelle alla lunghezza caratteristica \sqrt{vT} . Ciò richiederà un'apposita indagine sperimentale, tuttavia è possibile ottenere già ora qualche indicazione in proposito rielaborando i risultati pubblicati da altri ricercatori. In particolare, si vuole richiamare l'attenzione sul lavoro di Goddet ⁽²⁾, il quale ha effettuato una lunga serie di prove con l'intento

(2) J. GODDET, *Étude du débout d'entraînement des matériaux mobiles sous l'action de la houle*, « La Houille Blanche », marzo-aprile 1960.

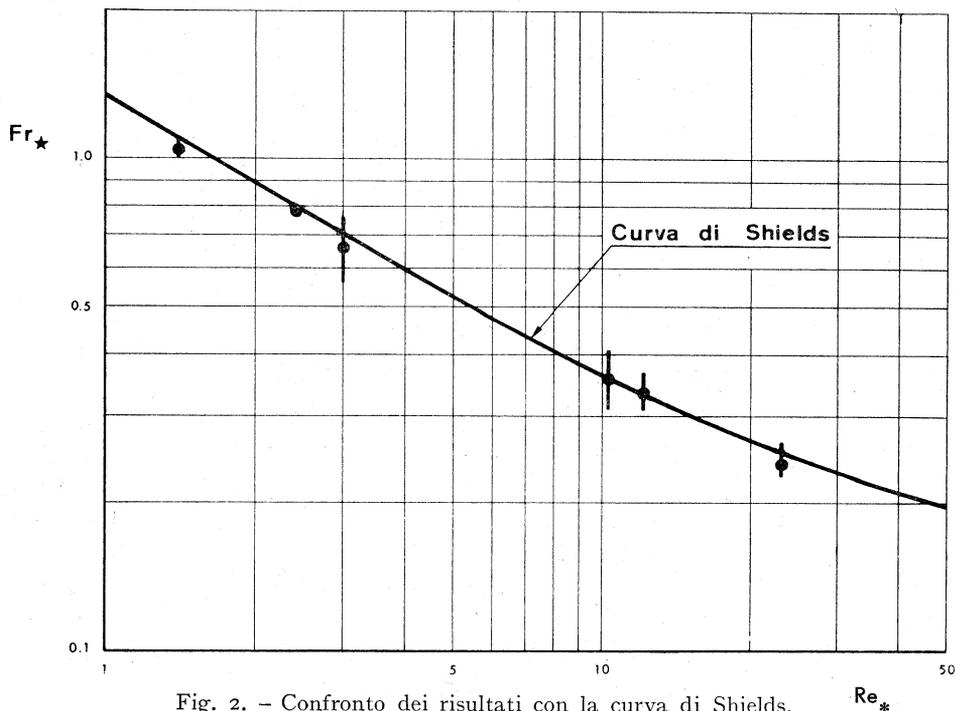


Fig. 2. - Confronto dei risultati con la curva di Shields.

I segmenti verticali indicano la dispersione dei dati.

di accertare una correlazione fra le caratteristiche del materiale mobile ed i parametri delle onde capaci di provocarne il movimento. La maggior parte di queste esperienze rientrano nel campo che qui interessa, perché condotte con onde in regime laminare su sedimenti di dimensioni limitate rispetto allo spessore dello strato limite.

TABELLA I.

Valori di Re_ .*

N	d (mm)	$\gamma_s - \gamma$ (kgm^{-3})	ν ($\text{m}^2 \text{sec}^{-1}$)	w (cm sec^{-1})	Re_*
1	0,15	1600	$1,3 \cdot 10^{-6}$	1,22	1,4
2	0,50	80	$1,3 \cdot 10^{-6}$	0,62	2,4
3	0,20	1600	$1,3 \cdot 10^{-6}$	1,95	3,0
4	0,70	180	$1,3 \cdot 10^{-6}$	2,00	10,8
5	0,60	350	$1,3 \cdot 10^{-6}$	2,65	12,2
6	0,50	1600	$1,3 \cdot 10^{-6}$	6,00	23,0

TABELLA II.
Valori di Fr_* .

N	T (sec)	$U_0 \text{ max}$ (cm sec ⁻¹)	$\frac{d}{\sqrt{vT}}$	Fr_*	$Fr_* \text{ medio}$
1	1,0	12,8	0,13	1,000	1,045
	1,5	17,6	0,11	1,059	
	2,0	21,0	0,09	1,076	
2	0,5	1,39	0,63	0,769	0,780
	0,7	1,70	0,51	0,780	
	0,8	1,85	0,48	0,791	
3	3,0	18,0	0,10	0,563	0,661
	1,5	14,0	0,14	0,591	
	2,7	19,2	0,09	0,598	
	2,5	19,4	0,11	0,612	
	2,0	18,0	0,12	0,624	
	4,0	27,0	0,09	0,642	
	2,0	19,5	0,12	0,648	
	1,0	14,1	0,17	0,655	
	3,0	24,6	0,10	0,659	
	1,0	14,3	0,17	0,661	
	1,5	17,7	0,14	0,664	
	0,8	13,0	0,19	0,666	
	1,5	18,2	0,14	0,673	
	2,0	21,9	0,12	0,687	
	1,5	18,9	0,14	0,689	
	2,0	22,3	0,12	0,694	
	1,0	16,0	0,17	0,699	
	1,0	16,5	0,17	0,710	
	2,0	23,7	0,12	0,715	
	2,2	28,0	0,12	0,760	
4	1,0	3,30	0,63	0,310	0,356
	1,5	4,27	0,48	0,319	

Segue: TABELLA II.

N	T (sec)	$U_0 \text{ max}$ (cm sec ⁻¹)	$\frac{d}{\sqrt{vT}}$	Fr _*	Fr _* medio
5	1,0	3,63	0,63	0,325	0,335
	2,0	5,20	0,44	0,327	
	2,0	5,45	0,44	0,334	
	0,8	3,65	0,67	0,344	
	1,0	4,10	0,63	0,344	
	1,5	5,70	0,48	0,368	
	1,5	5,80	0,48	0,370	
	2,0	6,90	0,44	0,376	
	0,5	3,78	0,88	0,393	
	0,8	5,10	0,67	0,407	
	0,7	4,85	0,73	0,411	
	2,0	8,20	0,38	0,310	
	2,0	8,50	0,38	0,315	
	1,8	5,80	0,58	0,328	
	1,5	7,90	0,43	0,329	
	1,5	8,20	0,43	0,333	
	0,8	5,80	0,58	0,338	
	1,0	6,90	0,51	0,338	
	1,0	7,00	0,51	0,339	
	1,0	7,10	0,51	0,342	
0,7	6,00	0,63	0,344		
0,8	7,40	0,58	0,370		
6	1,5	19,2	0,36	0,225	0,238
	2,0	22,0	0,31	0,227	
	1,0	16,2	0,49	0,228	
	2,0	24,9	0,31	0,238	
	1,0	17,9	0,49	0,239	
	1,5	22,8	0,36	0,244	
	3,0	38,0	0,25	0,265	

I dati sperimentali di Goddet, che sono riportati nelle tabelle, comprendono il diametro ed il peso specifico immerso dei granelli costituenti il fondo, la viscosità cinematica dell'acqua, il periodo dell'onda e la velocità presso il fondo.

Manca un'indicazione importante: quella della velocità di caduta libera in acqua ferma dei granelli impiegati. In difetto di tale informazione, si è fatto uso, per i materiali silicei naturali, della relazione che intercorre fra il diametro di setacciatura e quello di sedimentazione ⁽³⁾, attribuendo ai granelli un fattore di forma pari a 0,7, e si è supposto che i materiali di altra natura avessero forma sferica. Ciò ha permesso di stimare le velocità di caduta nelle condizioni in cui sono state effettuate le esperienze, e di calcolare successivamente i valori dei numeri di Reynolds e di Froude relativi alla situazione del fondo. Di quest'ultimo si presenta anche la media su le varie prove.

Nella fig. 2, i punti individuati dalle coppie corrispondenti di Fr_* ed Re_* sono posti a confronto con la classica curva di Shields per il moto permanente, trasporta sullo stesso riferimento come consigliato da Liu ⁽⁴⁾. L'accordo è senz'altro ottimo, anche se la dispersione dei dati indicata dai segmenti verticali passanti per i vari punti, appare piuttosto forte. In proposito si osserva che tali scostamenti sembrano dovuti alle incertezze nelle varie misure piuttosto che ad influenze secondarie del numero puro $d/\sqrt{\nu T}$, perché non è dato riconoscere una correlazione fra esso ed Fr_* .

Come accennato all'inizio, si può dunque affermare che il criterio per la stabilità del fondo sotto l'azione di una corrente permanente vale anche nei confronti delle onde purché il moto della massa liquida sia laminare e le dimensioni del sedimento siano piccole di fronte allo spessore dello strato limite. Occorre solamente costruire il numero di Froude relativo al materiale mobile impiegando la media sui semiperiodi spaziali e temporali della tensione tangenziale esercitata sul fondo.

(3) U.S. Inter-Agency Committee on Water Resources, Subcommittee on Sedimentation: *Some fundamentals of particle size analysis*, rept. 12, 1957.

(4) H. K. LIU, *Mechanics of Sediment-Ripple Formations*, «Proceedings of the A.S.C.E.», febbraio 1958.