
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

PAOLO AIELLO, GIOVANNI MARRO

Una dimostrazione del teorema di Mason relativo ai grafi di flusso di segnale

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.6, p. 407–411.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_407_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Scienze fisiche. — *Una dimostrazione del teorema di Mason relativo ai grafi di flusso di segnale.* Nota di PAOLO AIELLO e GIOVANNI MARRO, presentata (*) dal Corrisp. G. EVANGELISTI.

1. INTRODUZIONE. — I grafi di flusso di segnale hanno recentemente assunto notevole importanza per il valido ausilio che da essi possono trarre studiosi e tecnici, cui sia richiesta la soluzione di problemi riconducibili a sistemi di equazioni algebriche lineari.

Com'è noto, mediante il teorema di Mason [1] è possibile effettuare, tramite deduzioni di carattere topologico, la risoluzione del grafo, determinando il coefficiente di influenza di qualsiasi segnale sorgente su qualsiasi segnale dipendente.

Oltre alla dimostrazione data dallo stesso Mason nel 1956 [2], altre ne furono proposte successivamente, fra le quali sono degne di nota quelle di Coates [3] e di Desoer [4]; esse sono tutte caratterizzate da una notevole complessità e richiedono l'introduzione di definizioni, che nell'uso corrente dei grafi risultano superflue.

Nella presente Nota si espone una dimostrazione, in cui l'applicazione del principio di induzione consente di ottenere un procedimento più agile, facendo appello unicamente alle nozioni più elementari dell'algebra e della teoria dei grafi.

2. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI MASON. — Si consideri il generico grafo di flusso di segnale con un nodo sorgente ed n nodi dipendenti, rappresentato in fig. 1.

Con il simbolo x_o è indicato il segnale sorgente, con x_i ($i = 1, \dots, n$) il segnale dipendente relativo al nodo i e con τ_{ik} ($i = 1, \dots, n$; $k = 0, \dots, n$) il coefficiente del ramo diretto dal nodo k al nodo i .

Il teorema di Mason, com'è noto, permette di ricavare il coefficiente di influenza G_{io} del segnale sorgente x_o sul segnale x_i , mediante l'analisi di alcuni caratteri topologici del grafo. La relativa formula si può scrivere:

$$(1) \quad G_{io} = \frac{x_i}{x_o} = \frac{P_{io}}{\Delta},$$

in cui

Δ è il *determinante del grafo*, che per definizione è uguale all'unità, meno la somma dei coefficienti di tutti gli anelli (percorsi chiusi) del grafo, più la somma dei prodotti dei coefficienti delle coppie di anelli che non si toccano (ossia che non hanno alcun nodo in comune), meno la somma dei prodotti dei coefficienti delle terne di anelli che non si toccano, e così via;

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

P_{i_0} è la somma dei coefficienti di tutti i percorsi dal nodo sorgente o al nodo dipendente i , ciascuno moltiplicato per il determinante del grafo parziale che non tocca il percorso considerato (ossia per il determinante del grafo che si ottiene cancellando i nodi appartenenti al percorso considerato e tutti i rami che ad essi si appoggiano).

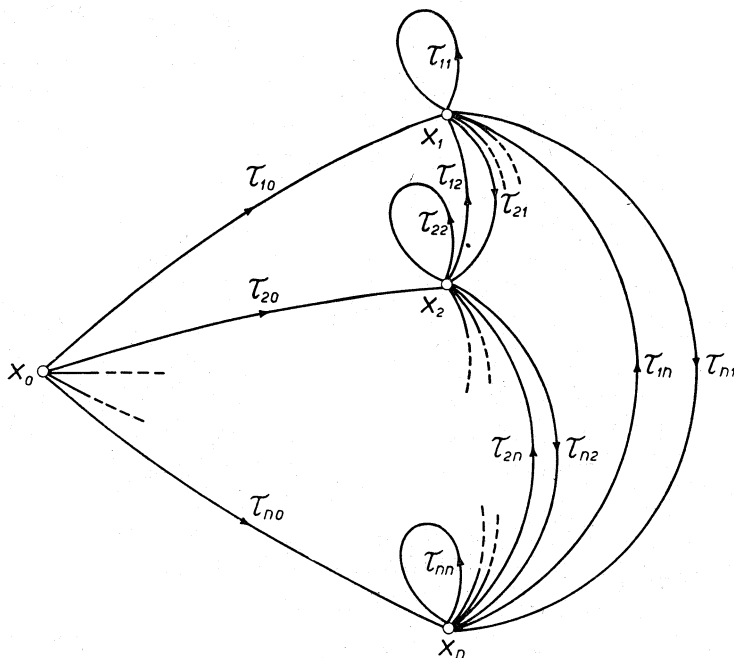


Fig. 1. - Grafo generico con un nodo sorgente ed n nodi dipendenti.

Per coefficiente di anello o di percorso si intende il prodotto dei coefficienti dei rami rispettivamente dell'anello o del percorso.

Il grafo rappresenta il sistema di equazioni

$$(2) \quad x_i = \sum_{k=0}^n \tau_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, n),$$

che è conveniente scrivere, separando i termini noti,

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n t_{ik} x_k = \tau_{i0} x_0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

avendo posto

$$(4) \quad t_{ik} = \begin{cases} -\tau_{ik}, & \text{per } i \neq k \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n); \\ 1 - \tau_{ii}, & \text{per } i = k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Risolvendo il sistema (3) con la regola di Cramer, si ottiene

$$(5) \quad G_{i0} = \frac{x_i}{x_0} = \frac{\sum_{k=1}^n \tau_{k0} T_{ki}}{T},$$

in cui

T è il determinante dei coefficienti del sistema (3);

T_{ki} è il complemento algebrico del termine t_{ki} .

Ciò premesso, per la dimostrazione del teorema di Mason è sufficiente verificare l'uguaglianza del numeratore e del denominatore della (1) rispettivamente al numeratore e al denominatore della (5).

Volgendo l'attenzione in primo luogo ai denominatori, si dimostra che il determinante del grafo è uguale al determinante dei coefficienti del sistema (3). La prova viene condotta mediante il principio di induzione; poiché tale uguaglianza è immediatamente verificabile per un grafo con un solo nodo dipendente, ci si limiterà a dimostrare che essa vale per un grafo con $n + 1$ nodi dipendenti, qualora sia supposta valida per un grafo con n nodi dipendenti.

Si conviene di indicare con

P_{ik} ($i \neq k$) la somma dei coefficienti di tutti i percorsi dal nodo dipendente k al nodo dipendente i , ciascuno moltiplicato per il determinante del grafo parziale che non tocca il percorso considerato; con

P_{ii} semplicemente il determinante del grafo parziale che non tocca il nodo i .

Scelto un qualunque nodo i , il determinante del grafo si può considerare somma di due parti, l'una costituita dai termini in cui non compaiono i coefficienti degli anelli passanti per il nodo considerato, l'altra dai rimanenti termini. Tale seconda parte si può esprimere come l'opposto della somma dei coefficienti di tutti gli anelli passanti per il nodo i , ciascuno moltiplicato per il determinante del grafo parziale che non tocca il relativo anello. Infatti l'opposto del coefficiente di ciascun anello che passi per il nodo i viene così ad essere moltiplicato per un'espressione pari all'unità, meno la somma dei coefficienti degli anelli che non toccano l'anello considerato, più la somma dei prodotti dei coefficienti delle coppie di anelli che non si toccano e che non toccano l'anello considerato, e così via; in tal modo evidentemente si formano tutti e soli i termini dello sviluppo del determinante contenenti i coefficienti degli anelli passanti per il nodo i .

Si può pertanto scrivere

$$(6) \quad \Delta = P_{ii} - \sum_{k=1}^n \tau_{ki} P_{ik},$$

in cui, per ciascun coefficiente di anello passante per il nodo i , si è posto in evidenza il coefficiente del ramo uscente dal nodo medesimo; questo è lecito in quanto il grafo parziale che non tocca un anello coincide con il grafo parziale che non tocca il percorso ottenuto cancellando un ramo dell'anello.

Ricordando le posizioni (4), la (6) si scrive più brevemente

$$(7) \quad \Delta = \sum_{k=1}^n t_{ki} P_{ik}.$$

Ponendo invece in evidenza i coefficienti dei rami entranti nel nodo i , si perviene in modo analogo all'espressione

$$(8) \quad \Delta = \sum_{k=1}^n t_{ik} P_{ki}.$$

Si supponga ora di aggiungere un $(n+1)$ -esimo nodo dipendente al grafo di fig. 1 e di collegarlo in tutti i modi possibili con gli n nodi dipendenti preesistenti e con il nodo sorgente, ottenendo così il grafo generico con $n+1$ nodi dipendenti. Si conviene di contrassegnare con un apice i simboli precedentemente introdotti, quando si riferiscano al grafo con $n+1$ nodi dipendenti. Ponendo pertanto

$$(9) \quad t'_{ik} = \begin{cases} -\tau_{ik}, & \text{per } i \neq k \\ 1 - \tau_{ii}, & \text{per } i = k \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n+1; k = 1, \dots, n+1)$$

il sistema corrispondente al nuovo grafo si scrive

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{n+1} t'_{ik} x_k = \tau_{io} x_o \quad (i = 1, \dots, n+1).$$

La prova per induzione si conduce supponendo anzitutto che il determinante (7) del grafo con n nodi dipendenti sia uguale al determinante dei coefficienti del corrispondente sistema (3), cioè che sia $\Delta = T$.

Notando poi che nell'espressione (7) sono posti in evidenza i termini della i -esima colonna della matrice dei coefficienti, si deduce, per il complemento algebrico $T'_{n+1,i}$ del coefficiente $t'_{n+1,i}$ del sistema (10), l'espressione

$$(11) \quad T'_{n+1,i} = - \sum_{k=1}^n t'_{k,n+1} P_{ik} \quad (i = 1, \dots, n),$$

in cui il segno negativo del secondo membro è un'ovvia conseguenza della regola del segno dei complementi algebrici.

Mediante le posizioni (9) la (11) si può porre nella forma

$$(12) \quad T'_{n+1,i} = \sum_{k=1}^n \tau_{k,n+1} P_{ik} = P'_{i,n+1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

D'altronde il determinante T' , sviluppato rispetto ai termini dell'ultima riga, si scrive

$$(13) \quad T' = \sum_{k=1}^{n+1} t'_{n+1,k} T'_{n+1,k}.$$

Sostituendo le (12) nella (13) e notando che

$$T'_{n+1,n+1} = T = \Delta = P'_{n+1,n+1},$$

si ottiene

$$(14) \quad T' = \sum_{k=1}^{n+1} t'_{n+1,k} P'_{k,n+1}$$

e pertanto, per la (8),

$$T' = \Delta'.$$

È così dimostrata l'uguaglianza dei denominatori delle (1) e (5).

Al fine di dimostrare l'uguaglianza dei numeratori, si consideri l'espressione (7), che già si sa essere equivalente allo sviluppo del determinante T ; non resta che sostituire in essa gli elementi della i -esima colonna della matrice dei coefficienti del sistema (3), già posti in evidenza, con i termini noti, per ottenere il numeratore della (5) nella forma

$$\sum_{k=1}^n \tau_{ko} P_{ik},$$

che equivale evidentemente al numeratore della (1), poiché il determinante del grafo parziale, che non tocca un percorso che parte dal nodo sorgente, è uguale al determinante del grafo parziale, che non tocca il percorso ottenuto dal precedente privandolo del primo ramo, in quanto per il nodo sorgente non può passare alcun anello.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. J. MASON, *Feedback theory: some properties of signal-flow graphs*, « Proceedings of the I.R.E. », pp. 1144-1156 (1953).
- [2] S. J. MASON, *Feedback theory: further properties of signal-flow graphs*, « Proceedings of the I.R.E. », pp. 920-926 (1956).
- [3] C. L. COATES, *Flow-graph solution of linear algebraic equations*, « I.R.E. Transactions on circuit theory », giugno 1959, pp. 170-187.
- [4] C. A. DESOER, *The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates' formula*, « Proceedings of the I.R.E. », pp. 883-889 (1960).