ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIUSEPPE VACCARO

Sulla nozione di vertice di una superficie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 401–406.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_401_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Geometria differenziale. — *Sulla nozione di vertice di una superficie.* Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

INTRODUZIONE. – Come è noto, si definisce vertice di una curva piana $\mathcal{C}$ di un piano euclideo:

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s)$$

dove $x(s)$, $y(s)$ sono funzioni di classe almeno C^3 del parametro s (non necessariamente l'arco), un suo punto P in cui

$$\frac{d\rho}{ds} = 0$$

essendo ρ la curvatura di $\mathcal{C}$ in P.

Mentre tale nozione di vertice è stata estesa in vari modi alle curve sghembe, solo recentemente O. Karwowski [1] (1) ha proposto una definizione di vertice per una superficie dello spazio euclideo S_3.

O. Karwowski, basandosi su alcune nozioni introdotte da P. Szymański [2], quali quelle di curvatura di una superficie secondo una direzione, di curvature longitudinale e trasversale ed infine quella di derivata geodetica, introduce dapprima la nozione di direzione verticale uscente da un punto di una superficie come una direzione in esso tangente lungo la quale si annulla la derivata geodetica della curvatura longitudinale e quindi definisce vertice di una superficie un suo punto tale che ogni direzione per esso sia verticale.

Nella presente Nota mostro come alla stessa nozione di vertice introdotta da Karwowski si può pervenire in modo immediato ed elementare sulla base di alcune nozioni da me introdotte in una Nota del 1955 [3]. In tale Nota ho introdotto il *prolungamento d'ordine k di una calotta* (2) *superficiale del 2° ordine*, σ^2, *di centro* O, *di uno spazio proiettivo*, *rispetto ad una conica* C^* come la totalità degli ∞^2 elementi curvilinei d'ordine k, E^k, d'origine O, ciascuno appartenente

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

(1) I numeri in [ ] si riferiscono alla bibliografia in fine al lavoro.

(2) La nozione di *calotta* o più in generale di *elemento differenziale* è dovuta, come è noto, al Bompiani. Ricordiamo qui la definizione generale.

Data una varietà differenziabile di classe C^s ($s \geq 1$) regolare di dimensione n, X_n, un suo punto O e una sottovarietà subordinata ad m dimensioni Y_m ($m < n$) pure passante per O, di classe C^h ($h \leq s$) e regolare ($h \geq 1$), la *classe d'equivalenza* costituita da tutte le varietà $\overline{Y}_m$ aventi gli stessi caratteri di Y_m a contatto d'ordine h in O con Y_m (ivi inclusa la Y_m) è, per definizione, un *elemento differenziale di centro* (o origine) O, *di dimensione m e di ordine h*; e si indica con σ^h_m.

Per $m = 1$ l'elemento differenziale si dice anche *elemento curvilineo* e si indica con E^h; per $m > 1$, σ^h_m si dice anche *calotta* di dimensione m e ordine h. In particolare una calotta superficiale d'ordine h si suole indicare col simbolo σ^h omettendo cioè l'indice $m = 2$.

Naturalmente l'ambiente può essere uno spazio proiettivo o euclideo.

Per maggiori dettagli sulla nozione di calotta si veda E. BOMPIANI [5].

alla conica definita da un E^2 della σ^2 ed appoggiantesi in due punti alla conica C^*. Ho chiamato ciascuno di tali ∞^2 E^k *associato* all'E^2 considerato rispetto a C^*.

Un tale prolungamento non è in generale una calotta: ci si può chiedere pertanto quanti E^k esso ha in comune con una calotta d'ordine k per la σ^2 data.

Sempre in [3] ho dimostrato così, tra l'altro, che data una calotta superficiale del 3° ordine di centro O, σ^3, per ogni generica tangente ad essa in O esiste un ben determinato E^2 il cui E^3 associato rispetto ad una data conica C^* appartiene a σ^3.

Ora, se lo S_3 ambiente è uno spazio euclideo e la conica C^* coincide con l'assoluto Ω, da quest'ultimo teorema discende (n. 1) che data una superficie S, per ogni generica tangente uscente da un suo punto O esiste una ben determinata sezione piana avente in O cerchio osculatore a contatto del 3° ordine.

Chiamando *tangente circolare* in un punto O di una superficie S, una tangente ad S in O tale che la sezione *normale* per essa abbia in O cerchio osculatore a contatto del 3° ordine si dimostra (n. 2) che in un generico punto O di una superficie vi sono tre tangenti circolari.

Le direzioni tangenti ad S in O normali alle tangenti circolari coincidono con quelle che Karwowski chiama direzioni verticali.

Definiamo quindi (n. 3) *vertice di una superficie* un suo punto O tale che ogni tangente in esso sia circolare.

Tale nozione di vertice, che coincide esattamente con quella introdotta da Karwowski, come è mostrato al n. 3, ha il vantaggio di una semplice interpretazione geometrica: infatti si può definire vertice di una superficie un suo punto O tale che tutte le sezioni normali per esso hanno in O cerchio osculatore a contatto del 3° ordine.

Sempre al n. 3, dopo aver determinato tutte le superficie luoghi di vertici, viene data una condizione necessaria affinché un punto O di una superficie sia vertice per essa.

1. ELEMENTI DEL 3° ORDINE CIRCOLARI PER UN PUNTO DI UNA σ^3. – Dette x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali di un punto dello S_3 euclideo, si consideri una superficie S di classe almeno C^3 e sia O ($x = y = z = 0$) un suo punto. Assunto il piano tangente ad S in O come piano $z = 0$ e le tangenti di curvatura in O come assi x e y, la S fino all'intorno del 3° ordine di O (cioè la sua calotta del 3° ordine di centro O) si scrive:

$$z = \frac{1}{2}(a_1 x^2 + a_2 y^2) + \frac{1}{3!}(a_{30} x^3 + 3\, a_{21} x^2 y + 3\, a_{12} x y + a_{03} y^3) + [>3] \tag{1.1}$$

dove:

$$a_1 = \frac{1}{R_1}\ ,\quad a_2 = \frac{1}{R_2}\ ,\quad a_{30} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_1}\ ,\quad a_{21} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R_1}\ , \tag{1.2}$$

$$a_{12} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_2}\ ,\quad a_{03} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R_2}\ (3)$$

(3) Per le espressioni di $a_{30}, a_{21}, a_{12}, a_{03}$ si veda [1] p. 153. Si veda anche E. BOMPIANI [4], p. 275.

essendo R_1 ed R_2 i raggi principali di curvatura della S in O e dove con $[>3]$ si sono indicati termini in x e y di ordine >3.

Chiamiamo con σ^2 la calotta del 2º ordine $\subset \sigma^3$ (1.1) e sia:

$$(1.3)\qquad \begin{cases} y = \lambda x + \mu x^2 + [>2] \\ z = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 \lambda^2) x^2 + [>2] \end{cases}$$

un suo E^2. Supponiamo $a_1 + a_2 \lambda^2 \neq 0$, con che escludiamo gli E^2 delle tangenti asintotiche.

Posto per brevità:

$$(1.4)\qquad A = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 \lambda^2),$$

il piano osculatore all'E^2 (1.3) è:

$$(1.5)\qquad \lambda A x - A y + \mu z = 0 .$$

L'E^3 per l'E^2 (1.3) ed appartenente al cerchio da esso definito è dato dalle equazioni, come si verifica subito:

$$(1.6)\qquad \begin{cases} y = \lambda x + \mu x^2 + \frac{2\lambda\mu}{1+\lambda^2} x^3 + [>3] \\ z = A x^2 + \frac{2\lambda\mu A}{1+\lambda^2} x^3 + [>3] . \end{cases}$$

Chiamiamo questo E^3, E^3 *circolare associato all'E^2* (1.3).

Al variare di λ e μ le (1.6) definiscono ∞^2 E^3 che costituiscono il *prolungamento circolare del 3º ordine della calotta σ^2 considerata.*

Un E^3 (1.6) appartiene alla σ^3 (1.1) se:

$$(1.7)\qquad \frac{\lambda\mu(a_1 - a_2)}{1+\lambda^2} = \frac{1}{3!}(a_{30} + 3a_{21}\lambda + 3a_{12}\lambda^2 + a_{03}\lambda^3).$$

Quindi *se il punto* O *non è ombelico* ($a_1 \neq a_2$) si ha che per λ generico, ossia diverso da 0 (corrispondente alla tangente di curvatura $y = 0$, ma lo stesso dicasi per l'altra tangente di curvatura $x = 0$) e da $\pm i$ (corrispondenti alle rette proiettanti da O le intersezioni del piano tangente in O alla σ^2 con l'assoluto Ω) esiste un ben determinato μ che definisce un E^2 il cui E^3 circolare associato appartiene a σ^3 (1.1); precisamente per λ generico, il valore di μ che determina l'E^2 richiesto è dato da:

$$(1.8)\qquad \mu = \frac{\frac{1}{3!}(1+\lambda^2)(a_{30} + 3a_{21}\lambda + 3a_{12}\lambda^2 + a_{03}\lambda^3)}{\lambda(a_1 - a_2)} .$$

Il piano di un tale E^2, posto per brevità:

$$(1.9)\qquad B = a_{30} + 3a_{21}\lambda + 3a_{12}\lambda^2 + a_{03}\lambda^3 ,$$

è dato da:

$$\lambda\,Ax - Ay + \frac{\frac{1}{3!}\,B\,(1+\lambda^2)}{\lambda\,(a_1 - a_2)}\,z = 0\,. \tag{1.10}$$

Al variare di λ i piani precedenti descrivono un cono di 5ª classe [3].

Si ha quindi:

Per ogni tangente in un punto O (*non ombelico*) *di una superficie* S, *diversa dalle tangenti asintotiche, dalle tangenti di curvatura e dalle tangenti che da* O *proiettano i punti di interzione del piano tangente ad* S *in* O *con l'assoluto, passa un piano che taglia la superficie in una curva avente in* O *cerchio osculatore a contatto del 3° ordine.*

Osserviamo che in corrispondenza per esempio alla tangente di curvatura $y = 0$ corrispondente al valore $\lambda = 0$, l'E^2 (1,3) diviene:

$$y = \mu x^2 + [>2]$$
$$z = Ax^2 + [>2]$$

e l'E^3 circolare ad esso associato diviene:

$$y = \mu x^2 + [>3]$$
$$z = Ax^2 + [>3]\,.$$

È subito visto per la (1.7) che questo E^3, *qualunque sia* μ, appartiene alla σ^3 (1.1) se e solo se:

$$a_{30} = 0$$

cioè, per le (1.2), se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_1} = 0\,. \tag{1.11}$$

S ha quindi:

Data una superficie S *ed un suo punto* O, *non esistono in generale sezioni piane di* S *tangenti in* O *ad una delle tangenti di curvatura ed aventi in* O *cerchio osculatore a contatto del 3° ordine; se ne esiste una, tutte le sezioni piane per la stessa tangente di curvatura godono della stessa proprietà.*

Le superficie $z = f(x, y)$ tali che in ogni loro punto sia verificata la (1.11) sono ben note: esse sono le superficie con un sistema di linee di curvatura circolari [(4)]; per queste superficie si verifica quindi la seconda alternativa del teorema precedente.

Osserviamo ancora che se il centro O della calotta σ^2 è un ombelico ($a_1 = a_2$) dalla (1.7) si ricava che l'E^3 (1.6) appartiene alla σ^3 (1.1) se:

$$B = 0. \tag{1.12}$$

In questa ipotesi la (1.7) risulta identicamente soddisfatta e pertanto, tenuta presente l'espressione (1.9) di B, si ha:

(4) Si veda per esempio [6].

Da un punto ombelicale O *di una superficie di* S_3 *escono tre tangenti tali che tutte le sezioni piane per ciascuna di esse hanno in* O *cerchio osculatore a contatto del 3° ordine* (5).

2. TANGENTI CIRCOLARI. – Se il punto O è generico ($a_1 \neq a_2$), dalla (1.7) si ha che il piano (1.10) risulta normale alla superficie S in O se:

$$a_{30} + 3\, a_{21}\, \lambda + 3\, a_{12}\, \lambda^2 + a_{03}\, \lambda^3 = 0\,. \tag{2.1}$$

Si ha quindi:

Per un generico punto O *di una superficie di* S_3 *escono tre tangenti tali che le sezioni normali per ciascuna di esse hanno in* O *cerchio osculatore a contatto del 3° ordine (ossia hanno vertice in* O).

Chiameremo *circolari* tali tangenti.

Karwowski chiama *direzioni verticali* quelle delle tangenti ad S ortogonali alle tangenti circorali; esse pertanto soddisfano alla equazione, posto $\omega = -1/\lambda$

$$a_{30}\, \omega^3 - 3\, a_{21}\, \omega^2 + 3\, a_{12}\, \omega - a_{03} = 0\,. \tag{2.2}$$

(Si confronti con la (2.30) di p. 153 di [1]).

Si osservi, tenendo presente le espressioni dei coefficienti della (2.1) date da (1.2), che se una delle curvature principali della superficie è costante, l'equazione (2.1) ha una radice doppia. Ciò avviene in particolare per le superficie sviluppabili, per le quali, come è noto, una delle curvature principali è nulla.

La (2.1) risulta identicamente soddisfatta se le due curvature principali della σ^3 (1.1) sono costanti; se ciò avviene per tutti i punti di una superficie, come è noto (6), essa è o una sfera $\left(\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = \text{cost}\right)$ o un piano $\left(\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0\right)$ oppure un cilindro di rotazione $\left(\text{per esempio } \frac{1}{R_1} = 0\,, \frac{1}{R_2} = \text{cost} \neq 0\right)$.

Si ha così (confrontare [1] p. 153, teor. I):

Le uniche superficie per cui ogni tangente è circolare sono: il piano, la sfera ed il cilindro di rotazione.

Per la discussione sulla realità delle radici della (2.1) rimandiamo alla Nota [1] di Karwowski.

3. VERTICI DELLE SUPERFICE. – Diamo ora la seguente definizione:

Dicesi vertice di una superficie un suo punto O *tale che tutte le tangenti in esso siano circolari; cioè tale che tutte le sezioni normali per esso abbiano in* O *cerchio osculatore a contatto del 3° ordine.*

(5) Anche questo teorema è un caso particolare di quello dimostrato in [3] p. 6. Infatti il prolungamento circolare di una σ^2 ombelicale, come è subito visto, appartiene ad una sfera per essa.

(6) Si veda per esempio [6], pp. 217–218.

Da questa definizione si trae che in un vertice di una superficie deve essere identicamente soddisfatta la (2.1) e quindi deve essere, tenendo presente le (1.2):

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{R_2} = 0 . \tag{3.1}$$

Queste condizioni, che coincidono con quelle date da Karwowski, permettono di affermare che se una superficie è luogo di vertici, deve avere entrambe le curvature principali costanti e quindi, in base a quanto detto alla fine del numero precedente:

Le uniche superficie luoghi di vertici sono il piano, la sfera ed il cilindro di rotazione.

Osserviamo ancora, analogamente a quanto si trova in [1], che poiché:

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} \tag{3.2}$$

essendo K la curvatura totale (gaussiana) della superficie, se sono verificate le (3.1) si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} K = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} K = 0 ; \tag{3.3}$$

e si ha quindi il teorema:

Condizione necessaria perché un punto O *di una superficie sia vertice è che in esso si annullino le derivate prime della curvatura gaussiana.*

Se la superficie e sviluppabile ($K = 0$), le (3.3) sono identicamente soddisfatte e le (3.1) dànno:

$$\frac{\partial}{\partial x} H = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} H = 0 . \tag{3.4}$$

essendo $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ la curvatura media della superficie.

Per alcune conseguenze delle (3.3) e (3.4) e per la ricerca dei vertici di alcuni tipi particolari di superficie rimandiamo al lavoro [1] di Karwowski.

BIBLIOGRAFIA.

[1] O. KARWOWSKI, *Vertical lines and points of a surface*, « Annales Polonici Mathematici », XIX, 141–168 (1964).

[2] P. SZYMAŃSKI, *Krzwizna wektorowa*, I, II, « Sesz. Nauk. P. W. », *25*, Geodezja nr. 2 (1956).

[3] G. VACCARO, *Sulle calotte superficiali dello spazio a tre dimensioni*, « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », ser. V, vol. XIV, fasc. 3–4, 525–532 (1955).

[4] E. BOMPIANI, *Some Extension of Meusnier and Euler Theorems*, « Tensor » (New Series), *14*, 268–276 (1963).

[5] E. BOMPIANI, *Nuovi enti geometrici: pseudoelementi differenziali*, « Rend. Seminario Matematico e Fisico di Milano », XXXIII, 236–255 (1963).

[6] H. GUGGENHEIMER, *Differential Geometry*, McGraw–Hill Book Company Inc. (1963).