Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Maria Teresa Bonardi

Intorno a certe superficie cubiche dello spazio di Galois

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 396–400.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_396_0>

Geometria. — *Intorno a certe superficie cubiche dello spazio di Galois* (*). Nota di MARIA TERESA BONARDI, presentata (**) dal Corrisp. E. TOGLIATTI.

1. Il problema di caratterizzare varietà algebriche di uno spazio lineare $S_{r,q}$, di dimensione r ed ordine q sopra un campo γ di Galois, è stato posto da B. Segre; e numerosi risultati sono stati ottenuti specialmente da B. Segre stesso e dai suoi allievi (1). G. Tallini si è interessato, in particolare, delle superficie cubiche di $S_{3,q}$ ($q > 3$, dispari) dotate di almeno tre punti doppi, ottenendo eleganti caratterizzazioni grafiche (2).

In questa Nota considero le superficie cubiche F^3 di $S_{3,q}$ ($q > 3$, dispari) aventi due soli punti doppi, e complessivamente $q^2 + 5q + 1$ punti, ossia il numero di punti massimo (3) per una superficie di quel tipo; e per tali F^3 dò una caratterizzazione analoga a quelle ottenute da G. Tallini nei lavori che ho citato. L'analisi necessaria per conseguire il risultato mette in evidenza una circostanza inattesa e precisamente che le due nozioni di superficie cubica con retta doppia e di superficie cubica ricoperta da rette non sempre coincidono, in quanto per $q = 5$ (e soltanto per $q = 5$) esistono superficie cubiche luoghi di rette che non posseggono retta doppia, ma soltanto due punti doppi conici.

2. Seguendo G. Tallini, prenderò in considerazione insiemi F (N) di N punti di $S_{3,q}$, aventi la proprietà di contenere ogni retta la quale abbia più di tre punti in comune con essi; dirò che $P \in F(N)$ è un punto doppio di F (N) se ogni retta passante per P e non appartenente per intero ad F (N) contiene al più un altro punto dell'insieme; supporrò inoltre che F (N) contenga la retta congiungente due suoi punti doppi, ma non contenga né piani né quadriche come parti.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

(1) Per le definizioni e le prime proprietà dei campi di Galois e degli spazi lineari finiti, nonché per una rassegna dei principali risultati ottenuti da B. Segre e dai suoi allievi su questo argomento, e per ampie indicazioni bibliografiche, cfr. B. SEGRE, *Lectures on modern geometry* (Roma, Cremonese, 1961).

(2) Cfr. G. TALLINI, *Caratterizzazione grafica di certe superficie cubiche di* $S_{3,q}$, Note I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *26*, 484–489 e 644–648 (1958).

(3) Se F è una superficie subica di $S_{3,q}$, contenente una retta r, e non è un cono né una rigata avente r per direttrice doppia, il numero dei punti di F è $q^2 + 1 + (7 - d)q$ ove d è il numero dei punti singolari di F su r. Cfr. L. A. ROSATI, *Sul numero di punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito*, « Boll. U.M.I. » (3), XI, 412–418 (1956).

Il risultato cui pervengo è il seguente

TEOREMA. – *Se* $N \geq q^2 + 5q + 1$, *ogni* $F(N)$ *di* $S_{3,q}$ (*con* $q > 3$, *dispari*) *dotato di due soli punti doppi è una superficie cubica*; e quindi possiede esattamente $q^2 + 5q + 1$ punti.

Dalla dimostrazione risulterà pure che ogni superficie cubica di $S_{3,q}$ dotata di $q^2 + 5q + 1$ punti, di cui due doppi, contiene sedici rette e nel caso $q = 5$ (e solo in questo caso) è da esse completamente ricoperta.

3. Si consideri dunque un insieme $F(N)$ di $S_{3,q}$ dotato di $N \geq q^2 + 5q + 1$ punti, di cui due (siano A e B) doppi. Tra i $q+1$ piani passanti per la retta $r = AB$ supponiamo che ve ne siano $l \geq 0$ la cui intersezione ulteriore con $F(N)$ è una coppia di rette, passanti una per A ed una per B; e che ve ne siano $t \geq 0$ seganti $F(N)$, fuori di r, in una sola retta. Se π_s $(s = 1, 2, \cdots, q+1-l-t)$ è uno qualsiasi dei rimanenti $q+1-l-t$ piani del fascio di asse r, e se esso contiene h_s punti di $F(N)$ non situati su r, questi – per le ipotesi fatte su $F(N)$ – costituiscono un h_s-arco, ampliabile in un $(h_s + 2)$-arco se ad esso si aggregano i punti A e B [4]. Ciò implica $0 \leq h_s \leq q - l$.

Dovrà, perciò, risultare:

$$l(2q-1) + tq + \sum_{s=1}^{q+1-l-t} h_s + q + 1 = N \geq q^2 + 5q + 1$$

e quindi

$$\sum_{s=1}^{q+1-l-t} h_s \geq q^2 + 4q - tq - 2lq + l; \tag{1}$$

d'altra parte deve essere

$$\sum_{s=1}^{q+1-l-t} h_s \leq (q-1)(q+1-l-t). \tag{2}$$

Da (1) e (2) si ricava subito

$$lq \geq 4q - t + 1 \tag{3}$$

e poiché $t \leq q + 1 - l$,

$$lq \geq 3q + l.$$

Risulta perciò $l > 3$; ossia sono almeno quattro i piani passanti per r e contenenti ciascuno due rette di $F(N)$, distinte da r e passanti l'una per A e l'altra per B. Consideriamone esattamente quattro, e supponiamo che essi seghino su $F(N)$, oltre r, le quattro coppie di rette a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, passanti le a_i per il punto A, le b_i per il punto B. Osserviamo subito che, per le ipotesi fatte su $F(N)$, le rette a_i e b_j sono sempre sghembe se $i \neq j$; e tre distinte delle rette a_i, oppure tre distinte delle b_i, non sono mai complanari [5].

(4) Cfr. G. TALLINI, op. cit., pp. 485–486.

(5) Infatti se a_i, a_j, a_h fossero complanari, ad una di queste rette – che insieme fornirebbero una completa sezione piana di $F(N)$ – dovrebbe essere appoggiata la retta b_k $(k \neq i, j, h)$.

Se, poi (i, j, h, k) è una qualunque permutazione dei numeri $1, 2, 3, 4$, sia r_{ij} la retta intersezione dei piani $a_i\, a_j$ e $b_h\, b_k$: essa non passa né per A né per B in quanto il piano $a_i\, a_j$ non può contenere B senza appartenere ad F (N), e per ragioni analoghe il piano $b_h\, b_k$ non può contenere A. La retta r_{ij} è allora sghemba con r e sega a_i, a_j, b_h, b_k in quattro punti distinti, quindi appartiene ad F (N) e costituisce la residua intersezione con F (N) di ciascuno dei piani $a_i\, a_j$ e $b_h\, b_k$ (rispettivamente oltre le rette a_i, a_j e b_h, b_k).

È ormai facile provare che, oltre la r e le a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, non esiste nessun'altra retta di F (N) passante per A. Invero una retta a di questo tipo, dovrebbe segare il piano $b_1\, b_2$ in un punto non situato né su b_1 né su b_2 e quindi appartenente ad r_{34}; di conseguenza il piano $a_3\, a_4$, che passa per r_{34}, conterrebbe anche a e farebbe parte di F (N). Analogamente si dimostra che le sole rette di F (N) passanti per B sono (oltre r) b_1, b_2, b_3, b_4. Ne segue che $l = 4$ e – sostituendo questo valore di l nella (3) – che $t \geq 1$.

Dall'osservazione precedente si ricava pure che due rette del tipo r_{ij} ed r_{hk}, ove (i, j, h, k) è ancora una qualunque permutazione di $1, 2, 3, 4$, sono certo incidenti; infatti, se non lo fossero, la retta passante per A ed appoggiata ad entrambe, pur essendo distinta dalle a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, apparterrebbe ad F (N). Se, invece, fossero incidenti due rette del tipo r_{ij} ed r_{jh}, il loro punto d'intersezione dovrebbe stare sia su a_j che su b_k, in quanto r_{ij} ed r_{jh} giacciono in due piani distinti passanti per a_j ed in due piani distinti passanti per b_k. Ma questo, come già si è osservato, non può accadere senza che il piano $a_i\, a_k$ faccia parte di F (N). Ciò premesso sia α uno dei t piani passanti per r e seganti F (N) ulteriormente secondo una retta. Questa, sia r', per quanto si è visto, non può passare né per A né per B e deve essere sghemba con ciascuna delle rette a_i, b_j; risulta invece incidente a ciascuna delle sei rette r_{ij}, perché il punto che essa ha in comune con il piano $a_i\, a_j$ non può non appartenere ad r_{ij} per l'ipotesi che F (N) non contenga piani. Le tre rette r_{12}, r_{23}, r, a due a due sghembe, definiscono una quadrica Q che contiene a_2, b_4 ed r'. Deve dunque essere $t \leq 1$ perché altrimenti F (N) conterrebbe più di tre rette d'uno dei regoli di Q e quindi tutta Q, il che è escluso dalle nostre ipotesi. Esiste dunque un solo piano per r intersecante ulteriormente F (N) in una sola retta.

Sostituendo i valori $l = 4$ e $t = 1$ nella (1) e nella (2) si ottengono le due diseguaglianze:

$$\sum_{s=1}^{q-4} h_s \geq (q-1)(q-4) \quad ; \quad \sum_{s=1}^{q-4} h_s \leq (q-1)(q-4)$$

le quali danno senz'altro:

$$\sum_{s=1}^{q-4} h_s = (q-1)(q-4)$$

e quindi $h_s = q - 1$, per ogni $1 \leq s \leq q - 4$.

In conclusione, ogni piano per r, diverso dai piani $a_i\,b_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ed rr', sega F (N), fuori di r, in un $(q - 1)$-arco, che diventa un $(q + 1)$-arco, ossia una conica, se ai suoi punti si aggiungono A e B; ed il numero dei punti di F (N) è esattamente $N = q^2 + 5q + 1$.

Allo scopo di determinare in $S_{3,q}$ una superficie cubica contenente le 16 rette r, r', a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ed r_{hk}, sarà utile la seguente osservazione *i punti* $R_i = a_i \cap b_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, *tre dei quali sono sempre non allineati, sono complanari ed individuano un quadrangolo avente come punti diagonali* $L = r_{12} \cap r_{34}$, $M = r_{13} \cap r_{24}$, $N = r_{14} \cap r_{23}$. Se invero gli R_i non fossero complanari, essi potrebbero essere assunti come punti fondamentali di un sistema di coordinate in $S_{3,q}$. E se, rispetto a tale sistema, risulta $A \equiv (p_1, p_2, p_3, p_4)$ e $B \equiv (q_1, q_2, q_3, q_4)$, imporre che r_{ij} ed r_{hk} siano incidenti equivarrebbe ad imporre la dipendenza lineare delle quattro equazioni:

$$p_k x_h - p_h x_k = q_j x_i - q_i x_j = p_j x_i - p_i x_j = q_k x_h - q_h x_k$$

e ciò (come si riconosce senza difficoltà) è in contrasto con l'ipotesi che ad F (N) non appartenga alcun piano. Scelti allora, come è lecito, R_1, R_2, R_3, R_4 come punti $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$ di un opportuno sistema di coordinate in $S_{3,q}$, risulta con facili calcoli $L \equiv (1, 1, 0, 0)$, $M \equiv (1, 0, 1, 0)$, $N \equiv (0, 1, 1, 0)$; e ciò appunto prova la nostra affermazione.

Poiché la caratteristica del campo γ non è 2, L, M, N non sono mai allineati; si può perciò supporre $L \notin r'$ e quindi $r' \cap r_{12} \neq r' \cap r_{34}$ (6). Si consideri allora in $S_{3,q}$ la superficie cubica F^3 avente A e B come punti doppi e passante per i punti $r' \cap r_{12}$, $r' \cap r_{23}$, $r' \cap r_{34}$, $a_1 \cap r_{12}$, $a_2 \cap r_{12}$, $a_2 \cap r_{23}$, $a_3 \cap r_{23}$, $a_3 \cap r_{34}$, $a_4 \cap r_{34}$, L e per un punto P di r_{23} distinto dalle intersezioni di r_{23} con r', a_2, a_3. Si vede facilmente, tenendo conto delle incidenze delle varie rette, che F^3 contiene r, r', le a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ e le sei rette r_{ij} $(1 \leq i, j \leq 4; i < j)$. Un qualunque piano σ passante per r e diverso dai piani rr' ed $a_i\,b_i$ sega su F (N) e su F^3 due coniche che coincidono perché hanno in comune i punti A e B e le intersezioni di σ con le tre rette, a due a due sghembe, r_{12}, r_{13}, r_{14}. F (N) ed F^3 sono dunque segate da ogni piano passante per r nello stesso insieme di punti e devono perciò coincidere: il teorema enunciato in principio è così completamente dimostrato.

4. Da quanto visto nei nn. 2 e 3, si ricava che ogni superficie cubica F^3 di $S_{3,q}$ con $q^2 + 5q + 1$ punti, di cui due (e solo due) doppi, contiene 16

(6) Di qui segue pure che F (N) non può contenere altre rette oltre quelle elencate all'inizio di questo numero e che uno solo, al più, dei punti L, M ed N può stare su r'. Infatti una retta g di F (N) diversa da quelle 16, e quindi certamente sghemba con r, dovrebbe essere incidente ad r'; se, perciò, si suppone $r' \cap r_{12} \neq r' \cap r_{34}$, g dovrebbe essere sghemba sia con r_{12} che con r_{34} e, di conseguenza, per intersecare i piani $a_1\,a_2$ e $a_3\,a_4$, dovrebbe appoggiarsi a due delle a_i; ma, in tal caso il piano di queste conterrebbe almeno quattro rette di F (N) e farebbe parte dell'insieme. Se, poi, r' contenesse oltre L uno dei punti M ed N, almeno due lati del quadrangolo $R_1\,R_2\,R_3\,R_4$ farebbero parte di F (N), pur essendo rette distinte dalle 16 considerate sopra.

rette delle quali si è anche determinata la configurazione. Se si suppone in particolare $q = 5$, è facile provare che in questo caso il numero dei punti appartenenti complessivamente a quelle rette è proprio $q^2 + 5q + 1 = 51$, ossia uguaglia il numero dei punti della superficie. Infatti (con le notazioni dei nn. precedenti) si vede subito che: r contiene 6 punti; ciascuna delle tre coppie r_{12}, r_{34}; r_{13}, r_{24}; r_{14}, r_{23} ne contiene 11, tutti distinti dai punti di r e da quelli delle r_{ij} che ad essa non appartengono; ciascuna coppia a_i, b_i contiene complessivamente 11 punti di cui due appartengono ad r, tre sono le intersezioni di a_i con r_{ij}, r_{ih}, r_{ik}, (se (i, j, h, k) è una permutazione di $1, 2, 3, 4$) ed altri tre sono le intersezioni di b_i con r_{jh}, r_{jk}, r_{hk}, mentre i rimanenti tre non appartengono a nessun'altra retta della superficie. Dunque, complessivamente, le 15 rette finora considerate contengono 51 punti distinti: tra di essi vi sono anche i punti di r', perché r' è incidente ad r ed a tutte le r_{ij}; anzi il calcolo ora eseguito conduce a concludere che, in questo caso, r' passa certamente per uno dei punti L, M, N. Una superficie cubica di $S_{3,5}$ del tipo ora considerato è la F^3 di equazione

$$x_0(4x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3) + x_2x_3(2x_1 + 3x_2 + x_3) = 0,$$

i cui punti doppi sono $A \equiv (1, 0, 0, 0)$ e $B \equiv (0, 1, 0, 0)$. Su questa F^3 giacciono le 16 rette seguenti:

r:	$x_2 = x_3 = 0$;	r_{12}:	$x_1 = 2x_0 + 3x_2 + x_3 = 0$;
r_{34}:	$x_0 = 2(x_1 - x_2) + x_3 = 0$;	r_{13}:	$x_1 + x_3 = x_0 + x_2 = 0$;
r_{24}:	$x_0 + x_3 = x_1 + x_2 = 0$;	r_{14}:	$x_0 + 3x_2 = x_1 - x_3 = 0$;
r_{23}:	$x_0 - x_3 = 2x_1 + x_2 = 0$;	a_1:	$x_1 = x_3 = 0$;
b_1:	$x_0 = x_3 = 0$;	a_2:	$x_1 = x_2 = 0$;
b_2:	$x_0 = x_2 = 0$;	a_3:	$x_1 - 2x_2 = x_1 + x_3 = 0$;
b_3:	$x_0 + x_3 = 2x_0 + x_2 = 0$;	a_4:	$x_1 + x_2 = x_1 - x_3 = 0$;
b_4:	$x_0 + x_2 = x_0 - x_3 = 0$;	r':	$x_0 + x_1 + 2x_2 = x_2 - x_3 = 0$;

e si controlla facilmente che queste rette contengono proprio 51 punti distinti, dei quali si determinano subito le coordinate.

Se invece si suppone $q = 5 + n$ $(n \geq 2)$, con un ragionamento del tutto analogo a quello appena usato per il caso $q = 5$, si vede che il numero s dei punti contenuti complessivamente nelle 16 rette di F^3 vale $51 + 16n$ oppure $51 + 16n - 1$ secondo che r passi oppure no per uno dei punti L, M, N e di conseguenza s è sempre inferiore, per $n \geq 2$ e pari, a $51 + 15n + n^2$, numero totale dei punti di F^3.