Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuliano Sorani, Michelangelo Vaccaro

Omologia a coefficienti in un fibrato

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 387–395.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_387_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Topologia. — *Omologia a coefficienti in un fibrato* (*). Nota di GIULIANO SORANI e MICHELANGELO VACCARO, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

In questa Nota ci proponiamo di introdurre una teoria dell'omologia singolare a coefficienti in un fibrato modulare **F** (ved. 1.1) o, in particolare, in un fascio di moduli. Ciò risponde, in qualche modo, alla esigenza di una teoria dell'omologia presentante una generalità confrontabile con quella della coomologia a coefficienti in un fascio, pur differenziandosene per l'impostazione.

L'omologia che presentiamo comprende come caso particolare, sotto opportune ipotesi per lo spazio base X, l'omologia singolare a coefficienti locali (ved. per esempio Hilton–Wylie [5]). Ciò viene di fatto mostrato in 2.4 nel caso in cui lo spazio X è separato e localmente semplicemente connesso. Più in particolare, se **F** è un fascio costante, l'omologia in questione si riduce all'ordinaria omologia singolare.

Per l'omologia così introdotta stabiliamo l'esistenza di una successione esatta di omologia associata ad una successione esatta di una categoria abbastanza generale di morfismi di fibrati, e precisamente quella degli X–morfismi di fibrati « bilocalmente banali » (ved. 2.2), tra i quali per esempio rientrano come caso particolare quelli dei fasci di moduli.

Il caso dell'omologia 0–dimensionale viene trattato a parte e in dettaglio, dandone una interpretazione come limite induttivo di tipo generale (ved. Grothendieck [4]). Notiamo infine che l'omologia ridotta non ammette questa generalizzazione.

1. – OMOLOGIA A COEFFICENTI IN UN FIBRATO.

1.1. *La categoria* $\mathfrak{F}_{\mathrm{X}}^{\mathbf{A}}$ *degli* X–*morfismi di fibrati modulari.* – Sia X uno spazio topologico. Dicesi *fibrato anulare su* X ogni fibrato gruppale $\mathbf{A} \equiv \mathrm{A} \xrightarrow{\pi} \mathrm{X}$ (« group bundle »: ved. Grothendieck [3]) abeliano e dotato di una ulteriore legge di composizione data da un'applicazione continua $\mathrm{A} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{A}$ tale che per ogni $x \in \mathrm{X}$, la sua restrizione alla fibra A_x corrispondente munisca A_x di una struttura di anello.

Un fibrato anulare si dirà *unitario* se l'anello su ogni fibra A_x è dotato di unità 1_x e la sezione $x \rightarrow 1_x$ è continua.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

DEFINIZIONE. – *Diremo fibrato modulare a sinistra (o a destra)* **F** *su* X *l'assegnazione dei seguenti dati*:

1° *un fibrato gruppale abeliano* $\mathbf{M} \equiv \mathrm{M} \xrightarrow{p} \mathrm{X}$,

2° *un fibrato anulare unitario* $\mathbf{A} \equiv \mathrm{A} \xrightarrow{\pi} \mathrm{X}$,

3° *un* X*–morfismo di fibrati* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{M} \xrightarrow{m} \mathrm{M}$ *tale che, per ogni* $x \in \mathrm{X}$, *la limitazione* $m/\mathrm{A}_x \times \mathrm{M}_x$ *dia ad* M_x *una struttura di modulo a sinistra (o a destra).*

Chiameremo X–morfismo $\alpha : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$ di fibrati modulari ogni coppia di X–morfismi

$$\varphi : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{A}_2 \quad , \quad \psi : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$$

dei rispettivi fibrati anulari e gruppali abeliani, tali che, per ogni $x \in \mathrm{X}$, diano luogo ad un'applicazione lineare corrispondente. Indicheremo con $\mathfrak{F}_{\mathrm{X}}^{\mathbf{A}}$ la categoria degli X–morfismi di fibrati modulari.

ESEMPIO 1. – *Il fascio di moduli dei germi di un prefascio di moduli.*

Sia $\{\mathbf{F}_{\mathrm{U}}, \rho_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}\}$ un prefascio di moduli (per esempio a sinistra) su X (o $\mathfrak{A}$–modulo: ved. Godement [2]) ed $\{\mathrm{A}_{\mathrm{U}}, \varphi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}\}, \{\mathrm{M}_{\mathrm{U}}, \psi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}\}$ i rispettivi prefasci di anelli e di gruppi abeliani su X. Siano $\mathbf{A} \equiv \mathrm{A} \xrightarrow{\pi} \mathrm{X}$ e $\mathbf{M} \equiv \mathrm{M} \xrightarrow{p} \mathrm{X}$ i fasci dei germi di tali prefasci e si definisca il prodotto $\mathrm{A} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ nel modo seguente.

Dati due germi α e μ, rispettivamente di **A** e di **M**, sullo stesso punto $x \in \mathrm{X}$, sia U un aperto X sul quale α e μ ammettano due rispettivi rappresentanti a_{U} e m_{U}. L'elemento $a_{\mathrm{U}} m_{\mathrm{U}} \in \mathrm{M}_{\mathrm{U}}$ individua su X un germe che diremo *il prodotto* dei due germi α e μ. Questa definizione è consistente in base all'ipotesi che $\{\mathrm{F}_{\mathrm{U}}, \rho_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}\}$ sia un prefascio di moduli.

Il fascio di moduli costituito dal fascio di gruppi abeliani dei germi del prefascio di gruppi abeliani $\{\mathrm{M}_{\mathrm{U}}, \psi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}\}$, dal fascio di anelli dei germi del prefascio di anelli $\{\mathrm{A}_{\mathrm{U}}, \varphi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}\}$ e dal prodotto ora definito, è un fibrato modulare (a sinistra) su X.

ESEMPIO 2. – *Il fibrato modulare dei germi di un prefascio di moduli topologici.*

Un prefascio $\mathfrak{F}$ di moduli topologici è per definizione un prefascio su X che ad ogni aperto U associa un modulo topologico M_{U} su un anello topologico A_{U} (con l'operazione esterna continua) e a ogni diade (U, V) di aperti di X una corrispondente applicazione lineare,

$$\varphi_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} \equiv \{\alpha_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} : \mathrm{A}_{\mathrm{U}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{V}}\, , \, \mu_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} : \mathrm{M}_{\mathrm{U}} \to \mathrm{M}_{\mathrm{V}}\}$$

con $\alpha_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}$ e $\mu_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}$ continue.

Si consideri [2] l'$\mathfrak{A}$–modulo $\mathrm{L}\mathfrak{F}$ dei germi di $\mathfrak{F}$ privato della topologia usuale e dotato invece, sia per il fibrato gruppale abeliano, sia per il fibrato anulare, della struttura topologica, descritta in [1] per il funtore Ger, definibile come la più fina per cui sono continue tutte le applicazioni

$$\mathrm{M}_{\mathrm{U}} \times \mathrm{U} \to \mathrm{M} \qquad (\mathrm{U} \text{ aperto di } \mathrm{X})$$

che a (m_{U}, u) $(m_{\mathrm{U}} \in \mathrm{M}_{\mathrm{U}}, u \in \mathrm{U})$ associano il germe, del prefascio $\mathfrak{M}$ dei moduli di $\mathfrak{F}$, di centro u e rappresentato da m_{U} (e analogamente per il fibrato anulare).

Si verifica facilmente che tutte le operazioni algebriche coinvolte risultano continue rispetto a questa topologia e di conseguenza si tratta di un fibrato modulare. Questo esempio si riconduce al precedente nel caso in cui tutti i moduli topologici hanno la struttura topologica discreta sia per il gruppo abeliano che per l'anello.

1.2. *Il funtore* S^n *delle catene singolari.* – Assumiamo come simplesso standard n–dimensionale s^n $(n \geq 0)$ il sottospazio dello spazio euclideo E^{n+1} costituito dai punti $t \equiv (t_1, \cdots, t_{n+1})$ soddisfacenti le condizioni $t_1 + \cdots + t_{n+1} = 1$, $t_i \geq 0$ $(i = 1, \cdots, n+1)$.

Sia $\mathbf{F} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{M})$ un fibrato modulare su X. Ogni applicazione continua $\sigma^n : s^n \to M$ dicesi un *simplesso singolare* di $\mathbf{F}$. Dicesi *base* di un simplesso singolare σ^n di $\mathbf{F}$ il simplesso singolare $p\sigma^n$ dello spazio X.

Dato un simplesso singolare τ^n di X di dimensione $n \geq 0$, sia M_{τ^n} l'insieme dei simplessi singolari n–dimensionali σ^n di base τ^n. Si definisca in M_{τ^n} una struttura di gruppo abeliano mediante la formula

$$(\sigma_1^n + \sigma_2^n)(t) = \sigma_1^n(t) + \sigma_2^n(t) \qquad (\sigma_1^n, \sigma_2^n \in M_{\tau^n}, t \in s^n)$$

il risultato essendo ovviamente un simplesso singolare $\sigma_1^n + \sigma_2^n$ di M_{τ^n}.

Si consideri a parte l'anello $\Gamma(X, \mathbf{A})$ delle sezioni continue globali del fibrato anulare $\mathbf{A}$ e si definisca il prodotto $\xi \cdot \sigma^n$ $(\sigma^n \in M_{\tau^n}, \xi \in \Gamma(X, \mathbf{A}))$ mediante la formula

$$(\xi \cdot \sigma^n)(t) = \xi(p\sigma^n(t)) \cdot \sigma^n(t) \qquad (t \in s^n)$$

il risultato essendo ovviamente un simplesso singolare $\xi \cdot \sigma^n$ di M_{τ^n}.

M_{τ^n}, munito di queste strutture, è un modulo sull'anello $\Gamma(X, \mathbf{A})$, che indicheremo con S_{τ^n}.

DEFINIZIONE. – *Il modulo*

$$S^n(X, \mathbf{F}) = \bigoplus_{\tau^n} S_{\tau^n}$$

sull'anello $\Gamma(X, \mathbf{A})$ *si dirà il modulo delle catene singolari n–dimensionali di* X *a coefficienti nel fibrato modulare* $\mathbf{F}$.

Diremo ora *funtore delle catene singolari n–dimensionali di* X il funtore $S^n(X, \ )$ $(n \geq 0)$ definito sulla categoria $\mathfrak{F}_X^{\mathbf{A}}$ che ad ogni X–morfismo di fibrati modulari

$$\alpha : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$$

associa l'applicazione lineare

$$S^n(X, \alpha) : S^n(X, \mathbf{F}_1) \to S^n(X, \mathbf{F}_2)$$

indotta dalla composizione dei simplessi singolari di $\mathbf{F}_1$ con l'applicazione continua di α.

LEMMA 1. – *Il funtore* S^n $(n \geq 0)$ *è esatto a sinistra.*

Dimostrazione. – Sia

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{E} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{F} \xrightarrow{\beta} \mathbf{G}$$

una successione esatta di X–morfismi della categoria $\mathfrak{F}_X^{\mathbf{A}}$. Mediante S^n se ne deduca la successione

$$\mathbf{o} \longrightarrow S^n(X, \mathbf{E}) \xrightarrow{\alpha^n} S^n(X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\beta^n} S^n(X, \mathbf{G}) \qquad (n \geq 0)$$

con $\alpha^n = S^n(X, \alpha)$, $\beta^n = S^n(X, \beta)$. L'applicazione lineare α^n è iniettiva in quanto è indotta da una applicazione continua iniettiva. Sia inoltre $c^n \in S^n(X, \mathbf{F})$ un elemento di Ker β^n. Poiché ogni simplesso di c^n è portato da β in un simplesso sulla sezione nulla di $\mathbf{G}$, la sua immagine è contenuta in $Im\, \alpha$ e quindi si ha $c^n \in Im\, \alpha^n$. Essendo d'altra parte $\beta^n \alpha^n = o$, il lemma è dimostrato.

Non è detto in generale che S^n sia un funtore esatto.

1.3. *Moduli di omologia a coefficienti in un fibrato modulare.* – Dato un fibrato modulare $\mathbf{F} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{M})$, sia σ^n un qualunque simplesso singolare di $\mathbf{F}$. Dicesi *bordo* di σ^n la catena $(n - 1)$–dimensionale

$$\partial\sigma^n = \begin{cases} \bigoplus_i (-1)^i \sigma_i^{n-1} & \text{per } n \geq 1 \\ o & \text{per } n = o \end{cases}$$

ove σ_i^{n-1} indica la i–sima faccia del simplesso σ^n definita al modo usuale.

Data una catena singolare $c^n \in S^n(X, \mathbf{F})$, dicesi suo *bordo* la catena singolare $(n - 1)$ –dimensionale ∂c^n definita come la somma delle $(n - 1)$–catene bordo dei suoi simplessi. Resta con ciò definita l'applicazione lineare

$$\partial_n : S^n(X, \mathbf{F}) \rightarrow S^{n-1}(X, \mathbf{F}) \qquad (n \geq 1)$$

e il complesso discendente $S_*(X, \mathbf{F})$:

$$\cdots \longrightarrow S^n(X, \mathbf{F}) \xrightarrow{\partial_n} S^{n-1}(X, \mathbf{F}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S^0(X, \mathbf{F}) \longrightarrow \mathbf{o}.$$

Si può porre quindi la seguente

DEFINIZIONE. – *Dicesi n–simo* $(n \geq 0)$ *modulo di omologia dello spazio* X, *a coefficienti nel fibrato modulare* $\mathbf{F}$, *il modulo*:

$$H_n(X, \mathbf{F}) = H_n(S_*(X, \mathbf{F})) = \operatorname{Ker} \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n-1}$$

sull'anello $\Gamma(X, \mathbf{A})$ *delle sezioni continue globali del fibrato anulare* $\mathbf{A}$ *di* $\mathbf{F}$.

L'omologia così definita è *non ridotta*. A meno che lo spazio M delle fibre di $\mathbf{F}$ non sia un prodotto topologico, non si può definire, in generale, una omologia ridotta.

2. – ALCUNE PROPRIETÀ DEL MODULO $H_n(X, \mathbf{F})$.

2.1. *Interpretazione del modulo* $H_0(X, \mathbf{F})$. – Sia $\mathbf{F} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{M})$ un fibrato modulare su uno spazio X, sia (x, y) una coppia di punti di X ed $|M_{xy}|$ l'insieme delle lc–componenti (componenti linearmente connesse) dello spazio delle fibre M, tali che le loro proiezioni in X contengano sia x che y.

Le operazioni di somma in M e di somma e prodotto in A, essendo continue, inducono una corrispondente struttura di modulo per $|M_{xy}|$ sull'anello $\Gamma(X, \mathbf{A})$. Indichiamo con F_{xy} tale modulo.

Consideriamo ora il sistema di applicazioni lineari

$$\{ \varphi_{yy}^{xy} : F_{xy} \to F_{yy} \}_{x,y \in X}$$

ove ogni φ_{yy}^{xy} applica ogni lc–componente elemento di F_{xy} in se stessa come elemento di F_{yy}.

Nella categoria delle applicazioni lineari indichiamo con

$$\mathcal{H} = \text{lim. ind. } \{ \varphi_{yy}^{xy} \}_{x,y \in X}$$

il modulo limite induttivo (ved. Grothendieck [4]) del suddetto sistema. Sia

$$\{ \varphi_{xy} : F_{xy} \to \mathcal{H} \}_{x,y \in X}$$

la famiglia di applicazioni lineari relativa a tale limite.

PROPOSIZIONE 1. – *Si ha l'isomorfismo*: $H_0(X, \mathbf{F}) \cong \mathcal{H}$.

Dimostrazione. – Consideriamo la famiglia di applicazioni lineari

$$\{ \rho_{xy} : F_{xy} \to H_0(X, \mathbf{F}) \}_{x,y \in X}$$

ove ogni ρ_{xy} associa ad ogni lc–componente elemento di F_{xy} la classe di 0–cicli individuata da un punto qualsiasi di tale componente. Il sistema di applicazioni $\{ \rho_{xy} \}$ individua, nella categoria delle applicazioni lineari, l'applicazione

$$\rho : \mathcal{H} \to H_0(X, \mathbf{F}).$$

Mostriamo che l'applicazione lineare ρ è un isomorfismo facendo vedere che essa ammette un'inversa ρ^{-1}. Consideriamo infatti la seguente applicazione lineare

$$\tilde{\rho} : S^0(X, \mathbf{F}) \to \mathcal{H}$$

definita come quella che associa ad ogni catena di $S^0(X, \mathbf{F})$ la classe di equivalenza di $\mathcal{H}$ cui appartiene l'elemento della somma diretta $\bigoplus_{x,y} F_{xy}$ individuato dai singoli punti della catena considerata.

Ogni 0–catena di $\mathbf{F}$ è sempre un ciclo ed è costituita da un numero finito di punti a basi distinte. L'alterazione per uno 0–bordo si può eseguire per iterazione utilizzando il bordo di un 1–simplesso singolare alla volta e consiste:

a) nell'aggiunta o soppressione di una coppia di punti opposti;

b) nella sostituzione di un punto con un altro punto della stessa lc–componente.

Ne segue che l'applicazione $\tilde{\rho}$ è costante sulle classi di omologia di $S^0(X, \mathbf{F})$. È allora possibile definire l'applicazione lineare quoziente:

$$\rho^{-1}: H_0(X, \mathbf{F}) \rightarrow \mathcal{H}$$

che, come è immediato verificare, è l'inversa della ρ. Ciò prova la proposizione 1.

Osservazione – Un caso particolare notevole si ha quando le lc–componenti di M hanno come proiezioni sullo spazio base X altrettante lc–componenti di X. In tale caso, per ogni lc–componente L di X tutti gli F_{xy}, con $x, y \in L$, sono fra loro isomorfi e si possono indicare con F_L. Ne segue l'isomorfismo:

$$H_0(X, \mathbf{F}) \cong \bigoplus_L F_L .$$

2.2. *I fibrati bilocalmente banali e i loro morfismi.*

DEFINIZIONE. – *Un fibrato* $\mathbf{F} \equiv F \xrightarrow{p} X$ *si dice bilocalmente banale (blb–fibrato) se per ogni punto f del suo spazio delle fibre* F *esistono:*

b1) *un intorno* $U_{pf} \subset X$ *della proiezione* pf;

b2) *uno spazio topologico* K_f;

b3) *una immersione* $i: U_{pf} \times K_f \rightarrow F$ *tale che* $\operatorname{Im} i$ *sia un intorno* U_f *di* f *e tale che, indicata con* $p_1: U_{pf} \times K_f \rightarrow X$ *la prima proiezione coordinata del prodotto* $U_{pf} \times K_f$, *considerata verso tutto* X, *si abbia* $p_1 = pi$.

Gli intorni U_f $(f \in F)$ del tipo suddetto si diranno gli *intorni coordinati* dei punti dello spazio F delle fibre.

DEFINIZIONE. – *Siano* $\mathbf{E} \equiv E \xrightarrow{p} X$, $\mathbf{F} \equiv F \xrightarrow{q} X$ *due blb–fibrati. Un* X*–morfismo* $\alpha: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$, *dato da un'applicazione continua* $\alpha: E \rightarrow F$ con $q\alpha = p$, *si dice un blb–morfismo se per ogni* $e \in E$ *esiste una coppia di intorni coordinati*

$$U_e = i(U_{pe} \times K_e) \quad , \quad U_{\alpha e} = i(U_{q\alpha e} \times K_{\alpha e})$$

tali che la limitazione $\alpha|U_e: U_e \rightarrow F_x$ *sia un omeomorfismo di* U_e *su* $U_{\alpha e}$ *indotto da un omeomorfismo del tipo* $\tilde{\alpha}: K_e \rightarrow K_{\alpha e}$.

DEFINIZIONE. – *Un fibrato modulare* $\mathbf{F} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{M})$ *si dice bilocalmente banale quando i due fibrati* $\mathbf{A}$ *ed* $\mathbf{M}$ *sono entrambi bilocalmente banali e tutte le strutture algebriche presenti sono date da* X*–morfismi bilocalmente banali.* Esso si dirà un *blb–fibrato modulare.*

Gli X–morfismi di blb–fibrati modulari, consistenti in una coppia di blb–morfismi dei rispettivi fibrati anulari e gruppali abeliani, saranno chiamati *blb–morfismi di fibrati modulari* e la loro categoria sarà indicata con $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}_{X,blb}$.

La categoria $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}_{X,blb}$ è una sottocategoria della categoria $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}_{X}$. In essa si può ovviamente parlare di successioni esatte.

Osservazione. – Tra i fibrati bilocalmente banali rientrano, in modo ovvio, i fasci ed i fibrati localmente banali.

2.3. *Successione esatta di omologia associata ad una successione esatta corta della categoria* $\mathcal{F}^{\mathbf{A}}_{X,blb}$. – In questo numero proveremo la seguente

PROPOSIZIONE 2. – *Sia*

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}' \rightarrow \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}'' \rightarrow \mathbf{0}$$

una successione esatta corta della categoria $\mathfrak{F}^{\mathbf{A}}_{X,blb}$. *Ad essa si può associare una successione esatta di omologia del tipo*:

$$\cdots \to H_n(X,\mathbf{F}') \to H_n(X,\mathbf{F}) \to H_n(X,\mathbf{F}'') \to$$
$$\to H_{n-1}(X,\mathbf{F}') \to \quad \cdots \quad \to H_0(X,\mathbf{F}'') \to \mathbf{o}.$$

La dimostrazione sarà fatta in base ai seguenti lemmi.

Data una catena singolare c^n e un intero h, indicheremo con $B^h c^n$ la catena singolare ottenuta sommando le catene singolari derivanti dal frazionamento baricentrico, fatto h volte, dei singoli simplessi di c^n.

LEMMA 2. – *Sia* $\alpha \equiv (\varphi, \psi) : \mathbf{F}_1 \to \mathbf{F}_2$ *un blb-morfismo di fibrati modulari e* c^n *una catena del fibrato* $\mathbf{F}_2$ *tale che la riunione delle immagini dei suoi simplessi sia contenuta nell'immagine di* ψ. *Esiste allora un intero h tale che la catena* $B^h c^n$ *sia contenuta nell'immagine di* $S^n(X,\alpha)$.

Dimostrazione. – Poichè il simplesso standard s^n è uno spazio metrico compatto, per ogni simplesso σ^n di c^n esiste un intero k tale che la limitazione di σ^n ad ogni simplesso del frazionamento baricentrico, fatto k volte, di s^n abbia l'immagine contenuta in un intorno coordinato U_{m_2} di M_2 tale che esista un intorno coordinato U_{m_1} di M_1 con $\psi U_{m_1} = U_{m_2}$. Preso $h = \max_{\sigma^n \in c^n} k$ il lemma è dimostrato.

Sia ora

$$\mathbf{o} \longrightarrow \mathbf{F}' \xrightarrow{i} \mathbf{F} \xrightarrow{g} \mathbf{F}'' \longrightarrow \mathbf{o}$$

una successione esatta corta della categoria $\mathfrak{F}^{\mathbf{A}}_{X,blb}$. L'esattezza a sinistra del funtore S^n permette di scrivere la successione esatta corta

$$\mathbf{o} \longrightarrow S^n(X,\mathbf{F}') \xrightarrow{i^n} S^n(X,\mathbf{F}) \longrightarrow \operatorname{Im} g^n \longrightarrow \mathbf{o} \qquad (n \geq 0)$$

con $g^n = S^n(X,g)$. Poichè, come è immediato verificare, il bordo di una catena di $\operatorname{Im} g^n$ $(n \geq 1)$ è un elemento di $\operatorname{Im} g^{n-1}$, si può scrivere il complesso discendente

$$\cdots \to \operatorname{Im} g^n \to \operatorname{Im} g^{n-1} \to \cdots \to \operatorname{Im} g^0 \to \mathbf{o}$$

che denoteremo con $\operatorname{Im} g_*$. Si ha quindi la seguente successione esatta corta di complessi discendenti

$$\mathbf{o} \to S_*(X,\mathbf{F}') \to S_*(X,\mathbf{F}) \to \operatorname{Im} g_* \to \mathbf{o}.$$

Ne segue la successione esatta di omologia:

$$\cdots \to H_n(X,\mathbf{F}') \to H_n(X,\mathbf{F}) \to H_n(\operatorname{Im} g_*) \to$$
$$\to H_{n-1}(X,\mathbf{F}') \to \quad \cdots \quad \to H_0(\operatorname{Im} g_*) \to \mathbf{o}.$$

LEMMA 3. – *Per* $n \geq 0$, *si ha l'isomorfismo* $H_n(\operatorname{Im} g_*) \cong H_n(X,\mathbf{F}'')$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione lineare

$$\psi : H_n(\operatorname{Im} g_*) \to H_n(X,\mathbf{F}'')$$

indotta dall'immersione $\operatorname{Im} g^n \to S^n(X,\mathbf{F}'')$. Per stabilire l'isomorfismo occorrerà mostrare che la ψ è bijettiva.

Proviamo dapprima che la ψ è sujettiva. Infatti dato $h_n \in H_n(X, \mathbf{F}'')$ e $z^n \in h_n$, in virtù del lemma 2 esiste una potenza $B^h z^n$ contenuta in $\operatorname{Im} g^n$ ed inoltre la formula

$$B^h z^n - z^n = \partial \sum_r k B^r z^n ,$$

ove k è il noto operatore di omotopia, mostra che $B^h z^n$ appartiene alla stessa classe di omologia di z^n ed individua pertanto una classe $\tilde{h} \in H_n(\operatorname{Im} g_*)$ con $\psi \tilde{h}_n = h_n$.

Proviamo ora che la ψ è iniettiva. Infatti dati $\tilde{z}_i^n \in \tilde{h}_n^i \in H_n(\operatorname{Im} g_*)$ $(i = 1, 2)$, sia $\gamma^n = \tilde{z}_2^n - \tilde{z}_1^n$. Risulta $\gamma^n \in \operatorname{Im} g^n$, ma γ^n può non essere bordo di una catena di $\operatorname{Im} g^{n+1}$. Sia $\{\gamma^n\} \in H_n(\operatorname{Im} g_*)$ la classe di omologia di γ^n e sia $\psi\{\gamma^n\}$ la classe corrispondente in $H_n(X, \mathbf{F}'')$. Supponiamo ora che sia $\psi\{\gamma^n\} = 0$. Si ha allora $\gamma^n = \partial \zeta^{n+1}$ con $\zeta^{n+1} \in S^{n+1}(X, \mathbf{F}'')$.

Sia $\overline{B}$ l'operatore di frazionamento baricentrico parziale delle catene lasciante il loro bordo inalterato. Poichè la riunione delle immagini dei singoli simplessi di ζ^{n+1} è compatta esiste una potenza finita $\overline{B}^j$ di $\overline{B}$ tale che $\overline{B}^j \zeta^{n+1} \in \operatorname{Im} g^{n+1}$. Ne segue $\{\gamma^n\} = 0$ e quindi l'iniettività della ψ.

Resta con ciò dimostrato il lemma in questione e la proposizione 2.

2.4. *Il caso dell'omologia singolare a coefficienti locali.* – Ricordiamo (cfr. Hilton–Wylie [5]) che l'omologia singolare $H_*(X, \{G\})$ a coefficenti locali è definita a partire da un sistema locale di gruppi $\{G\} \equiv \{G_x, f_\beta\}$, consistente nell'assegnazione di un gruppo abeliano G_x per ogni punto x di un dato spazio X e di un isomorfismo $f_\beta : G_{\beta(0)} \to G_{\beta(1)}$ per ogni cammino $\beta : I \to X$, tale che la famiglia $\{f_\beta\}$ sia costante sulle classi di omotopia vincolata agli estremi.

Supponiamo lo spazio X separato e localmente semplicemente connesso e consideriamo il fibrato gruppale abeliano su X il cui spazio delle fibre è dato dall'insieme $|M| = \sum_x |G_x|$ con la struttura algebrica delle fibre G_x e con la seguente struttura topologica. Si consideri la famiglia di applicazioni

$$\{\xi_{\beta,g} : I \to |M|\}$$

con β cammino qualunque di X e $g \in G_{\beta(0)}$, ognuna definita ponendo $\xi_{\beta,g}(t) = f_{\beta_t}(g)$, ove β_t è il cammino definito da

$$\beta_t(s) = \beta((1-t)s) \qquad (s \in I).$$

La topologia di M sia allora la più fina per cui ognuna delle $\xi_{\beta,g}$ è continua.

Per ogni $g \in |M|$ ed ogni intorno aperto semplicemente connesso U_{pg} della proiezione pg di g in X, l'insieme V_g dei secondi estremi dei cammini di M uscenti da g e tali che la loro proiezione sia contenuta in U_{pg} risulta un intorno di g in M in corrispondenza biunivoca con U_{pg}. Da ciò segue che lo spazio delle fibre M è separato.

Mostriamo che un'applicazione $\rho : \mathrm{I} \to \mathrm{M}$, non appartenente alla famiglia $\{\xi\}$ ma tale che $p\rho$ sia un cammino di X, non è continua rispetto alla topologia che si è introdotta in $|\mathrm{M}|$.

Infatti sia t_0 l'estremo inferiore dei valori di t per cui il cammino $\sigma = \xi_{p\varrho, \varrho(0)}$, di base $p\rho$ e primo estremo $\rho(0)$, assume valore diverso da quello di ρ. Poichè M è separato risulta $\rho(t_0) = \sigma(t_0)$; ne segue che un intorno di $\rho(t_0)$, che sia in corrispondenza biunivoca con la sua proiezione in X, è tale che la sua controimmagine rispetto a ρ contiene il punto t_0. Poiché t_0 è punto di accumulazione di punti non appartenenti all'intorno, ciò prova che l'applicazione ρ non è continua.

Sia $\mathbf{F} \equiv (\mathbf{A}, \mathbf{M})$ il fibrato modulare sul fibrato anulare costante prodotto topologico di X per l'anello J degli interi con la topologia discreta, in cui $\mathbf{M}$ sia il fibrato gruppale abeliano ora costruito. È facile mostrare che, per ogni n, si ha:

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{X}, \mathbf{F}) \cong \mathrm{H}_n(\mathrm{X}, \{\mathrm{G}\}).$$

Infatti da quanto precede è immediato verificare che i rispettivi complessi delle catene singolari sono isomorfi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. ABEASIS–M. VACCARO, *Interpretazione omotopica della coomologia di Čech a coefficenti in un prefascio*, «Annali di Matematica», *65*, 167–190 (1964).

[2] R. GODEMENT, *Théorie des fàisceaux*, 1958.

[3] A. GROTHENDIECK, *A general theory of fiber spaces with structure sheaf*, University of Kansas, 1955.

[4] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, «Tohoku Math. J.», *9*, 119–221 (1957).

[5] P. J. HILTON–S. WYLIE, *Homology theory*, 1960.