Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Salvatore Cherubino

Trasformazione dei coefficienti tecnici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 381–386.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_381_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Economia matematica. — *Trasformazione dei coefficienti tecnici* (*). Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Le trasformazioni considerate si riportano sui vettori delle produzioni dei prezzi ed altri, rispecchiando il cosiddetto *sistema dei prezzi* dell'economia. Il quale potrebbe più esattamente dirsi « presentazione del $2n$–vettore produzioni–prezzi di un sistema economico » e di altre coppie di vettori.

Queste trasformazioni lasciano invariate alcune grandezze significative del sistema economico e quelle che dipendono essenzialmente dai tassi di profitto e dai fattori del progresso scientifico–tecnico.

Le proprietà ottenute sono collegate con alcune notevoli ma semplici osservazioni premesse e con la nozione di ottimo.

1. Sia $\boldsymbol{a}$ la matrice dei coefficienti *tecnici* di un sistema economico ad n settori; $\mathbf{X}$, $\mathbf{p}$ i vettori della produzione lorda e dei prezzi di costo netti; $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ quelli dei consumi e dei costi di forza–lavoro necessaria per produzione unitaria in lorda ciascun settore verificatosi in un intervallo di tempo $(0 , t_1)$. Valgono le seguenti disuguaglianze caratteristiche:

$$(1) \qquad [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\, \mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}\, [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \geqq \mathbf{Z}.$$

Si consideri la produzione lorda ottenuta aggregando gli n settori secondo le intensità date dagli elementi del vettore positivo o semipositivo $\lambda = (\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_n)$ ed il prezzo netto corrispondente:

$$(2) \qquad \lambda\, [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\, \mathbf{X}_{-1} \geqq \lambda \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}\, [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\, \lambda_{-1} \geqq \mathbf{Z} \lambda_{-1}$$

e pongasi

$$(3) \qquad \mu = \lambda\, [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \quad ; \quad \mu^*_{-1} = \lambda\, [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\, \lambda_{-1}.$$

Il vettore μ e lo scalare μ^* dànno rispettivamente la *quantità complessiva relativa lorda* di produzione ed il corrispondente *costo complessivo relativo netto* ottenuto, mentre $\lambda \mathbf{Y}_{-1}$, $\mathbf{Z} \lambda_{-1}$ sono le *quantità complessive dei consumi necessari* ed il *costo della forza–lavoro necessaria complessiva.*

Abbiamo che:

a) *la quantità complessiva relativa lorda ed il costo netto complessivo della produzione ottenuta con la intensità* $\lambda = (\lambda_1 , \lambda_2 , \cdots , \lambda_n) > 0$ *sono non minori della quantità complessiva dei consumi necessari e del corrispondente costo complessivo della forza lavoro impiegata per produzione unitaria.*

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

Siano ora λ e λ' i vettori intensità di produzione che dànno due settori eguali di quantità complessiva:

$$\lambda\,(\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] = \lambda'\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]. \tag{5}$$

Moltiplicando a destra per l'inversa di $\mathrm{I} - \boldsymbol{a}$, che è una matrice non negativa, si ha $\lambda = \lambda'$ e viceversa. Lo stesso per l'uguaglianza dei vettori complessivi dei costi.

Si abbia invece:

$$\lambda\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \geq \lambda'\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]. \tag{6}$$

Moltiplicando per $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}$ a destra si ha $\lambda \geq \lambda'$. Se il sistema economico è irriducibile si ha che l'inverso di $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]$ è una matrice positiva, quindi risulta $\lambda > \lambda'$. Dunque:

b) *se i due vettori di intensità λ, λ' dànno produzioni lorde complessive relative e costi netti relativi complessivi eguali, si avrà $\lambda = \lambda'$; e viceversa;*

c) *se i due vettori di intensità λ, λ' dànno produzioni lorde complessive relative ovvero costi netti relativi necessari complessivi disuguali, precisamente il primo $\geq$ o $>$ del secondo, si avrà $\lambda \gtreqless \lambda'$, oppure $\lambda > \lambda'$ secondo che il sistema economico è riducibile o irriducibile.*

2. Indichiamo con $\overline{\mathbf{Y}}$, $\overline{\mathbf{Z}}$ due vettori positivi o semipositivi maggiori o eguali rispettivamente di $\mathbf{Y}$ e di $\mathbf{Z}$ e prendiamo $\mathbf{X}^0$, $\boldsymbol{p}^0$ tali che:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\ \mathbf{X}^0_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] = \overline{\mathbf{Z}}. \tag{7}$$

Indichiamo con $\mathbf{X}'$, $\boldsymbol{p}'$ due vettori pei quali si ha:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}'_{-1} \geq \overline{\mathbf{Y}}_{-1} \geq \mathbf{Y}_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}'\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \geq \overline{\mathbf{Z}} \geq \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Sottraendo da queste le precedenti si ha:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,(\mathbf{X}' - \mathbf{X}^0)_{-1} \geq 0 \quad ; \quad (\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}^0)\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \geq 0 \tag{9}$$

dalle quali, moltiplicando a sinistra per $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]^{-1}$, si ha, se il sistema è riducibile:

$$\mathbf{X}^0 \geq \mathbf{X}' \quad ; \quad \mathbf{P}^0 \geq \boldsymbol{p}' \tag{10}$$

ovvero, se il sistema è irriducibile:

$$\mathbf{X}^0 > \mathbf{X}' \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0 > \boldsymbol{p}'. \tag{11}$$

Abbiamo dunque ottenuto che:

a) *presi due qualsiansi vettori $\overline{\mathbf{Y}}$, $\overline{\mathbf{Z}}$ maggiori o eguali rispettivamente di $\mathbf{Y}$ e di $\mathbf{Z}$ e risolvendo rispetto $\mathbf{X}^0$, $\boldsymbol{p}^0$ le* (7), *i vettori ottenuti sono minimi impropri o propri dell'insieme dei vettori $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{p}$ soddisfacenti rispettivamente le* (1).

I vettori $\mathbf{X}^0_{-1}$, $\boldsymbol{p}^0$ sono perciò ottimi: essi sono anche massimi degli insiemi descritti dalle soluzioni di (8) quando in esse vale $\leq$ anziché $\geq$.

3. Sia H una matrice non singolare e non negativa insieme alla sua inversa, perciò diagonale; essa dà una trasformazione lineare della matrice $\boldsymbol{a}$ mediante le posizioni:

$$(11)_1 \qquad \begin{cases} \mathrm{H}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathrm{H}^{-1}\cdot\mathrm{H}\mathbf{X}^0_{-1} = \mathrm{H}\overline{\mathbf{Y}}_{-1} \\ \boldsymbol{p}^0\,\mathrm{H}^{-1}\cdot\mathrm{H}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathrm{H}^{-1} = \overline{\mathbf{Z}}\mathrm{H}^{-1}; \end{cases}$$

quindi, posto:

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{H}\mathbf{X}^0_{-1} = \overline{\mathbf{X}}^0_{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{p}^0\,\mathrm{H}^{-1} = \overline{\boldsymbol{p}}^0 \\ \mathrm{H}\overline{\mathbf{Y}}_{-1} = \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_{-1} \quad ; \quad \mathbf{Z}\,\mathrm{H}^{-1} = \overline{\overline{\mathbf{Z}}} \end{cases}$$

ed

$$(13) \qquad \mathrm{H}\boldsymbol{a}\,\mathrm{H}^{-1} = \boldsymbol{a}' ;$$

$$(14) \qquad [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}']\,\overline{\mathbf{X}}^0_{-1} = \overline{\overline{\mathbf{Y}}}_{-1} \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{p}}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}'] = \overline{\overline{\mathbf{Z}}},$$

si ha quindi:

$$15) \qquad \overline{\mathbf{X}}^0_{-1} = [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}'^{-1}]\,\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_{-1} \quad ; \quad \overline{\boldsymbol{p}}^0 = \overline{\overline{\mathbf{Z}}}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}']_{-1}.$$

La matrice $\boldsymbol{a}'$ è anch'essa non negativa, insieme ad $[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}']^{-1}$, che, se il (sistema è irreducibile è positiva. Ne segue che, moltiplicando le prime delle (12), e così le seconde, si ha:

$$(16) \qquad \boldsymbol{p}^0\,\mathbf{X}^0_{-1} = \overline{\boldsymbol{p}}^0\,\overline{\mathbf{X}}^0_{-1} \quad ; \quad \overline{\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{Y}}_{-1} = \overline{\overline{\mathbf{Z}}}\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_{-1}.$$

Combinando fra di loro in croce le (14) e (15) si ha:

$$(17) \qquad \overline{\boldsymbol{p}}^0\,\overline{\overline{\mathbf{Y}}}_{-1} = \overline{\overline{\mathbf{Z}}}\,\overline{\overline{\mathbf{X}}}^0_{-1}.$$

Dunque:

a) *il valore nominale della produzione totale ottima del sistema economico, e così il valore intrinseco dei consumi totali corrispondenti, restano invariati nella trasformazione;*

b) *il valore nominale della produzione (consumo) totale lorda ottima del sistema economico eguaglia il valore intrinseco dei consumi (produzione) ottimi.*

4. I coefficienti capitali sono anch'essi numeri non negativi, parte di quelli tecnici; cioè, detta $\boldsymbol{b}$ la loro matrice, si ha che $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{a}}$ è non negativa. Detto $\mathbf{C}$ il vettore dei capitali netti investiti nei singoli settori, si ha che $[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]\,\mathbf{C}_{-1}$ è la parte dei capitali $\mathbf{C}$ che non è utilizzata nella produzione: essa serve per pagare i salari e gli stipendi degli operai e degli impiegati, il cui ammontare è dato da $\boldsymbol{p}^0\overline{\mathbf{Y}}_{-1}$; perciò si ha:

$$(18) \qquad \boldsymbol{p}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]\,\mathbf{C}_{-1} = \boldsymbol{p}^0\,\overline{\mathbf{Y}}_{-1},$$

ove $\overline{\mathbf{Y}}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1}$ è il consumo non necessario. Si ha perciò:

$$(19) \qquad \boldsymbol{p}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}]\,\mathbf{C}_{-1} = \boldsymbol{p}^0\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}]\,\mathbf{X}^0_{-1}.$$

Operiamo la trasformazione di matrice H già adoperata. Ponendo $\mathrm{H}^{-1}\mathbf{C}_{-1} = \overline{\mathbf{C}}_{-1}$, tenendo presenti le (12) e ponendo:

$$b' = \mathrm{H}\, \boldsymbol{b}\, \mathrm{H}^{-1}, \tag{20}$$

dalle (18)–(19) si ha:

$$\bar{\boldsymbol{p}}^0 \, [\mathrm{I} - \boldsymbol{b}'] \, \overline{\mathbf{C}}_{-1} = \bar{\boldsymbol{p}}^0 \, \overline{\mathbf{Y}}_{-1} = \bar{\boldsymbol{p}}^0 \, [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}'] \, \overline{\mathbf{X}}^0_{-1}. \tag{21}$$

Dalla seconda delle (7), che può scriversi:

$$\boldsymbol{p}^0 \, [\mathrm{I} - \bar{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}] = \bar{\mathbf{Z}}, \tag{22}$$

si ha:

$$\boldsymbol{p}^0 \, [\mathrm{I} - \boldsymbol{b}] = \bar{\mathbf{Z}} + \boldsymbol{p}^0 \tag{23}$$

Trasformando con H, e ponendo

$$\bar{\mathbf{Z}}' \, \mathrm{H}^{-1} = \bar{\bar{\mathbf{Z}}}' \quad , \quad \bar{\boldsymbol{a}}' = \mathrm{H}\, \boldsymbol{a}\, \mathrm{H}^{-1}, \tag{24}$$

si ottiene:

$$\bar{\boldsymbol{p}}^0 \, [\mathrm{I} - \boldsymbol{b}'] = \bar{\bar{\mathbf{Z}}}' + \bar{\bar{\boldsymbol{p}}}^0 \, \bar{\boldsymbol{a}}'. \tag{25}$$

Il vettore $\bar{\mathbf{Z}}'$ è il costo della forza–lavoro impiegata per capitale unitario investito. D'altra parte, dalla disuguaglianza caratteristica:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}] \, \mathbf{C}_{-1} \geqq [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \, \mathbf{X}_{-1} \geqq \mathbf{Y}_{-1} \tag{26}$$

per $\mathbf{X} = \overline{\mathbf{X}}^0$, $\mathbf{Y} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1}$ si ha:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}] \, \mathbf{C}_{-1} = [\mathrm{I} - \boldsymbol{a}] \, \mathbf{X}^0_{-1} = \bar{\ }_{-1}. \tag{27}$$

Trasformando con la solita H e ponendo $\overline{\mathbf{C}}_{-1} = \mathrm{H}\, \mathbf{C}_{-1}$, si ha:

$$[\mathrm{I} - \boldsymbol{b}'] \, \overline{\mathbf{C}}_{-1} = \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_{-1}. \tag{28}$$

Dalla (25), moltiplicando per $\mathbf{C}_{-1}$, si ha:

$$\bar{\boldsymbol{p}}^0 \, [\mathrm{I} - \boldsymbol{b}'] \, \overline{\mathbf{C}}_{-1} = \bar{\bar{\mathbf{Z}}}' \, \overline{\mathbf{C}}_{-1} + \bar{\boldsymbol{p}}^0 \, \bar{\boldsymbol{a}}' \, \overline{\mathbf{C}}_{-1}, \tag{29}$$

ossia

$$\bar{\boldsymbol{p}}^0 \, \bar{\bar{\mathbf{Y}}}_{-1} = \bar{\bar{\mathbf{Z}}}' \, \overline{\mathbf{C}}_{-1} + \bar{\boldsymbol{p}}^0 \, \bar{\boldsymbol{a}}' \, \overline{\mathbf{C}}_{-1}, \tag{30}$$

la quale, ritrasformata con H^{-1}, ci dà:

$$\boldsymbol{p}^0 \, \overline{\mathbf{Y}}_1 = (\bar{\mathbf{Z}}' + \boldsymbol{p}^0 \, \bar{\boldsymbol{a}}) \, \mathbf{C}_{-1} = \bar{\mathbf{Z}}'' \, \mathbf{C}_{-1} \tag{31}$$

ove $\bar{\mathbf{Z}}''$ è vettore del costo della forza–lavoro impiegata per capitale unitario investito, cioè $\bar{\mathbf{Z}}'' = \boldsymbol{p}^0 \, \bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\mathbf{Z}}'$.

Si ha quindi che:

c) *il costo del consumo ottimo totale è eguale al valore intrinseco del capitale impiegato.*

5. Sia i_r il tasso di interesse o di profitto del settore r durante l'intervallo di tempo $(0, t_1)$ in cui si considera l'economia; K_r il fattore che rappresenta, in detto settore ed intervallo, il progresso tecnico ed organizzativo insieme ad altri eventuali fattori che influenzano la produzione od i prezzi[1], in $(0, t_1)$.

Si dica D la matrice diagonale che ha per termini principali:

$$K_r \cdot e^{i_r t} \quad ; \quad r = 1, 2, \cdots, n \qquad \text{e si ponga:} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{D}\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}''\,\mathrm{D} \tag{33}$$

ed $\mathrm{H} = \mathrm{D}$. Si avrà:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{D}\,[\mathrm{I} - \boldsymbol{a}'\,\mathrm{D}]\,\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{D}^{-1}\,[\mathrm{I} - \mathrm{D}\,\boldsymbol{a}'']\,\mathrm{D}. \tag{34}$$

Nelle $\mathrm{H}\mathbf{X}^0_{-1}$, $\boldsymbol{p}^0\,\mathrm{H}^{-1} = \boldsymbol{p}^0\,\mathrm{D}^{-1}$ si vede che i trasformati dei settori ottimi delle produzioni e dei prezzi vengono moltiplicati e rispettivamente divisi per le (32). Lo stesso pei consumi e pei costi di lavoro ottimi; per essi valgono i teoremi a), b) e c) dei due numeri precedenti.

Il tasso del profitto del settore r è costante durante un intervallo di regolarità, poiché è costante la matrice $\boldsymbol{a}$ (caso del termine breve) e può supporsi sia lo stesso in tutti gli n settori. In modo analogo si comportano i fattori K_r. La matrice $\boldsymbol{a}$ è funzione di i_r e di k_r, quindi del tempo (termine lungo).

6. I coefficienti capitali possono avere diverso tasso di profitto e diverso fattore K_r, in ciascun settore. Porremo quindi:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{D}\,\bar{\boldsymbol{a}}' + \mathrm{D}'\,\boldsymbol{b}' = \bar{\boldsymbol{a}}''\,\mathrm{D} + \boldsymbol{b}''\,\mathrm{D}'. \tag{35}$$

Per la permutabilità delle matrici diagonali si ha $\mathfrak{D} = \mathrm{D}^{-1}\,\mathrm{D}' = \mathrm{D}'\,\mathrm{D}^{-1}$, quindi:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{D}\,[\bar{\boldsymbol{a}}' + \mathfrak{D}\boldsymbol{b}'] = [\bar{\boldsymbol{a}}'' + \boldsymbol{b}''\,\mathfrak{D}]\,\mathrm{D}. \tag{36}$$

Analogamente, posto $\mathfrak{D}_1 = \mathrm{D}'^{-1}\,\mathrm{D} = \mathrm{D}\,\mathrm{D}'^{-1}$, si ha:

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{D}'\,[\mathfrak{D}_1\,\bar{\boldsymbol{a}}' + \boldsymbol{b}'] = [\bar{\boldsymbol{a}}''\,\mathfrak{D}_1 + \boldsymbol{b}'']\,\mathrm{D}'. \tag{36$_1$}$$

Ossia, posto ad esempio:

$$\boldsymbol{a}^* = [\bar{\boldsymbol{a}}' + \mathfrak{D}\,\boldsymbol{b}'] \quad , \quad \boldsymbol{a}^{**} = [\mathfrak{D}_1\,\bar{\boldsymbol{a}}' + \boldsymbol{b}'], \tag{37}$$

si ha:

$$[\mathrm{I} + \mathrm{D}\,\boldsymbol{a}^*]\,\mathbf{X}^0_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1}, \tag{38}$$

ovvero

$$[\mathrm{I} + \mathrm{D}'\boldsymbol{a}^{**}]\,\mathbf{X}^0_{-1} = \overline{\mathbf{Y}}_{-1}, \tag{38}$$

cioè la matrice dei coefficienti tecnici diventa $\mathrm{D}\boldsymbol{a}^*$ o $\mathrm{D}'\boldsymbol{a}^{**}$, che dipendono dai tassi di profitto e dai fattori K_r, quindi dal tempo, come $\boldsymbol{a}$, quando $(0, t_1)$

(1) Per distinguere questi vari fattori si può porre $K_r = K'_r \cdot K''_r \cdots K^{(m)}_r$.

non appartiene a un intervallo di regolarità assegnato, e come le sue parti $\bar{\boldsymbol{a}}$ e $\boldsymbol{b}$.

Si ha, come prima, per $H = D$ od $H = D'$, che i teoremi a), b) del n. 3 e c) del n. 4 valgono anche in questi casi.

Anche qui si presenta il termine breve (eguale a un intervallo di regolarità) in cui i tassi di profitto (uno per la produzione, l'altro pel capitale) si presentano eguali in ogni settore (per cui l'intervallo $(0, t_1)$ è in un intervallo di regolarità) e possono essere fra loro eguali. Ciò non avviene a termine lungo, nel quale si possono avere tassi diversi per i vari settori.