Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Vecchio

Su certi interi associati ai primari di un ideale in un anello noetheriano

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 377–380.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_377_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Algebra. — *Su certi interi associati ai primari di un ideale in un anello noetheriano* (*). Nota di GIUSEPPE VECCHIO, presentata (**) dal Corrisp. E. TOGLIATTI.

1. Sia A un anello commutativo, con identità e noetheriano; sia $\mathfrak{Q}$ un ideale primario di A. Se $\mathfrak{P} = \sqrt{\mathfrak{Q}}$ (radicale di $\mathfrak{Q}$), sia s il minimo intero tale che

$$x \in \mathfrak{P} \Rightarrow x^s \in \mathfrak{Q} \quad \text{per ogni } x \in \mathfrak{P}.$$

L'esistenza di un tale intero è assicurata dalla noetherianità di A (1). In questa Nota dimostro che:

1° *se* $\mathfrak{A}$ è *un ideale di* A, *privo di componenti immerse, ed*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{Q}_n \tag{1}$$

è la sua decomposizione primaria, tra tutte le n-ple di interi tali che per ogni scelta degli elementi $x_i \in \sqrt{\mathfrak{Q}_i}$ *risulti*

$$x_1^{\varrho_1} \cdots x_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{A}$$

ne esiste una minima, costituita da $(s_1, \cdots, s_n)$;

2° *se* A *è un anello di Macaulay, cioè un anello in cui ogni ideale di classe principale è puro, ed* $\mathfrak{A}$ *è un ideale di classe principale di* A *avente la decomposizione primaria* (1), *gli interi* s_i *coincidono con certi interi che ho introdotto in* [1].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

(1) Si osservi che, nel caso in cui A sia l'anello dei polinomi in un numero finito di indeterminate sopra un campo k di caratteristica zero l'intero s coincide con l'esponente del primario $\mathfrak{Q}$, cioè col minimo intero s_0 tale che $\mathfrak{P}^{s_0} \subset \mathfrak{Q}$. È noto infatti che ogni forma di grado s di A si può esprimere come somma di un numero finito di potenze s-me di forme lineari: infatti, sia S_N lo spazio lineare i cui punti rappresentano le ipersuperficie algebriche di ordine s dello spazio lineare S_r, e si V_r la varietà di Veronese di S_N i cui punti rappresentano le ipersuperficie algebriche della forma $u^s = 0$ con u polinomio di primo grado. Si vede facilmente che si possono trovare su V_r $N+1$ punti razionali su k linearmente indipendenti.

Ed allora, se $x_1, \cdots, x_s \in \mathfrak{P}$, il prodotto $x_1 \cdots x_s$ si esprime come somma di un numero finito di potenze s-me di forme lineari in $x_1, \cdots, x_s$ e quindi appartiene a $\mathfrak{Q}$.

Si osservi tuttavia che, in generale, risulta $s < s_0$; ad esempio se k è di caratteristica $p \neq 0$ e $\mathfrak{Q} = (X_1^p, \cdots, X_r^p)$ con $r \geq 2$, si ha $\mathfrak{P} = (X_1, \cdots, X_r)$ e si riconosce subito che $s = p$, mentre il prodotto di p elementi di $\mathfrak{P}$ non appartiene in generale a $\mathfrak{Q}$.

2. In questo numero supporremo che A sia un anello noetheriano qualunque.

LEMMA. – *Sia* $\mathfrak{A}$ *un ideale di* A; *siano* $\mathfrak{Q}_1, \cdots, \mathfrak{Q}_n$ *i suoi primari isolati e sia* $\mathfrak{P}_i$ *il radicale di* $\mathfrak{Q}_i$. *Allora esistono elementi* $x_i \in \mathfrak{P}_i$ *tali che*

$$x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{P}_j \quad , \quad x_i^{s_i - 1} \notin \mathfrak{Q}_i .$$

Consideriamo, per fissare le idee, il primario $\mathfrak{Q}_1$. Per ipotesi, esiste un elemento $y_1 \in \mathfrak{P}_1$ tale che $y_1^{s_1-1} \notin \mathfrak{Q}_1$; se $y_1 \notin \bigcup_{j=2}^{n} \mathfrak{P}_j$ basta prendere $x_1 = y_1$. Supponiamo allora che $y_1 \in \bigcup_{j=2}^{n} \mathfrak{P}_j$. Possiamo ordinare i $\mathfrak{Q}_j$ in guisa che risulti $y_1 \in \mathfrak{P}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_m$ ed $y_1 \notin \mathfrak{P}_{m+1} \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_n$. Supponiamo dapprima $m < n$; il caso, più semplice, $m = n$ sarà esaminato successivamente.

Osserviamo intanto che $\mathfrak{P}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_m \not\supset \mathfrak{P}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_n$; infatti se così non fosse, per qualche k $(1 \leq k \leq m)$ si avrebbe $\mathfrak{P}_k \supset \mathfrak{P}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_n$ (cfr., ad esempio [2], vol. I, cap. IV, § 6, p. 215 Remark) e quindi per qualche t $(m + 1 \leq t \leq n)$ si avrebbe $\mathfrak{P}_k \supseteq \mathfrak{P}_t$, il che è assurdo essendo i $\mathfrak{P}_j$ i primi isolati di $\mathfrak{A}$.

Presi allora, com'è lecito, un elemento $a \in \mathfrak{P}_{m+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_n$ tale che $a \notin \mathfrak{P}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_m$ ed un elemento $b \in \mathfrak{P}_1$ tale che $b \notin \mathfrak{P}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_n$, consideriamo l'elemento

$$x_1 = a y_1 + b^{s_1} \tag{2}$$

che sta in $\mathfrak{P}_1$. Essendo i $\mathfrak{P}_j$ primi, si ha $b^{s_1} \notin \mathfrak{P}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_n$ e poiché $a y_1 \in \mathfrak{P}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{P}_n$, risulta $x_1 \notin \mathfrak{P}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{P}_n$. Inoltre da (2) si ha subito

$$x_1^{s_1-1} - (a y_1)^{s_1-1} \in \mathfrak{Q}_1 .$$

D'altra parte, risulta

$$(a y_1)^{s_1-1} = a^{s_1-1} y_1^{s_1-1} \notin \mathfrak{Q}_1 ;$$

infatti, $a^{s_1-1} \notin \mathfrak{P}_1$ e $y_1^{s_1-1} \notin \mathfrak{Q}_1$. Deve allora essere

$$x_1^{s_1-1} \notin \mathfrak{Q}_1 .$$

Se $m = n$, basta prendere $a = 1$ per concludere nello stesso modo. Ripetendo il ragionamento per $i = 2, \cdots, n$ si dimostra il lemma.

Introdotto nell'insieme delle n-ple ordinate $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ di numeri naturali un ordinamento parziale ponendo

$$(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \leq (\sigma'_1, \cdots, \sigma'_n) \Longleftrightarrow \sigma_i \leq \sigma'_i \quad \text{per ogni} \quad i = 1, \cdots, n ,$$

dimostriamo il

TEOREMA 1. – *Sia* $\mathfrak{A}$ *un ideale d'un anello noetheriano* A, *privo di componenti immerse e sia* (1) *la sua decomposizione primaria.*

Tra tutte le n–ple di interi $(\rho_1, \cdots, \rho_n)$ *tali che per ogni scelta degli elementi* $x_i \in \sqrt{\mathfrak{Q}_i}$ *risulti*

$$x_1^{\rho_1} \cdots x_n^{\rho_n} \in \mathfrak{A},$$

ne esiste una minima, costituita da $s_1, \cdots, s_n$.

Osserviamo intanto che risulta $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n} \in \mathfrak{A}$, qualunque siano gli elementi $x_i \in \sqrt{\mathfrak{Q}_i}$. Se poi $x_1, \cdots, x_n$ sono elementi che verificano il lemma, è facile provare che $(s_1, \cdots, s_n)$ è la n–pla minima per cui risulta

$$x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n} \in \mathfrak{A}.$$

Sia, infatti, $x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n} \in \mathfrak{A}$ e proviamo che $(t_1, \cdots, t_n) \geq (s_1, \cdots, s_n)$; se così non fosse, per almeno un indice i si avrebbe $t_i < s_i$ e, poiché $x_1^{t_1} \cdots x_{i-1}^{t_{i-1}} \cdot x_{i+1}^{t_{i+1}} \cdots x_n^{t_n} \notin \mathfrak{P}_i$, dovrebbe essere $x_i^{t_i} \in \mathfrak{Q}_i$, il che è contraddittorio. Il teorema è così provato.

Osservazione. – Nella (1) ordiniamo i $\mathfrak{Q}_i$ in guisa che risulti $s_1 \leq s_2 \leq \leq \cdots \leq s_n$. Sia $x \in \sqrt{\mathfrak{A}}$ e sia $\rho(x)$ il minimo intero per cui $x^{\rho(x)} \in \mathfrak{A}$. Risulta allora

$$s_n = \max_{x \in \sqrt{\mathfrak{A}}} \rho(x).$$

È chiaro che per ogni $x \in \sqrt{\mathfrak{A}}$ risulta $x^{s_n} \in \mathfrak{A}$. D'altra parte se $x = x_1 \cdots x_n$ con $x_1, \cdots, x_n$ soddisfacenti il lemma, risulta $x^{s_n - 1} \notin \mathfrak{A}$. Infatti, se fosse $x^{s_n - 1} \in \mathfrak{A}$ si avrebbe, in particolare, $x^{s_n - 1} = x_1^{s_n - 1} \cdots x_n^{s_n - 1} \in \mathfrak{Q}_n$ e poiché $x_1^{s_n - 1} \cdots x_{n-1}^{s_n - 1} \notin \mathfrak{P}_n$, dovrebbe essere $x_n^{s_n - 1} \in \mathfrak{Q}_n$, assurdo.

3. In questo numero supporremo che A sia un anello di Macaulay.

In [1] ho dimostrato che (cfr. teoremi 3 e 4):

Se $\mathfrak{A}$ *è di classe principale e* $z_1, \cdots, z_n$ *sono elementi di* A *tali che* $z_i \in \mathfrak{P}_i$, $z_i \notin \bigcup_{i \neq j} \mathfrak{P}_j$ *ed inoltre esiste un sistema* $a_1, \cdots, a_h$ *di generatori di* $\mathfrak{A}$ *tali che l'ideale* $(z_i, a_1, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_h)$ *per ogni coppia di indici* i, j *sia di altezza* h *e semiprimo* (*cioè intersezione di ideali primi*), *allora tra tutte le n–ple* $(\rho_1, \cdots, \rho_n)$ *di interi per cui*

$$z_1^{\rho_1} \cdots z_n^{\rho_n} \in \mathfrak{A},$$

ne esiste una minima $(\bar{\rho}_1, \cdots, \bar{\rho}_n)$.

La n–pla minima $(\bar{\rho}_1, \ldots, \bar{\rho}_n)$ *dipende solo da* $\mathfrak{A}$. *Inoltre se* $x_1, \cdots, x_n$ *sono elementi di* A *tali che* $x_i \in \mathfrak{P}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{P}_j$ *e tali inoltre che tra tutte le n–ple* $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ *soddisfacenti alla*

$$x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} \in \mathfrak{A}$$

ne esiste una minima, questa è $\leq (\bar{\rho}_1, \ldots, \rho_n)$.

Proviamo adesso il seguente

TEOREMA 2. – *Sia* $\mathfrak{A}$ *un ideale di classe principale di* A. *Sia* (1) *la decomposizione primaria di* $\mathfrak{A}$ *e sia* $\mathfrak{P}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ *il radicale di* $\mathfrak{Q}_i$. *Se* $z_1, \ldots, z_n$

sono elementi di A *tali che* $z_i \in \mathfrak{P}_i$ *e* $z_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{P}_i$ *e se esiste un sistema* $a_1, \cdots, a_h$ *di generatori di* $\mathfrak{A}$ *tali che gli ideali* $(z_i, a_1, \cdots, a_{j-i}, a_{j+1}, \cdots, a_h)$ $(1 \leq i \leq n,$ $1 \leq j \leq h)$ *siano tutti semiprimi e di altezza* h, *allora* $(s_1, \cdots, s_n)$ *è la* n*–pla minima di interi per cui* $z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n} \in \mathfrak{A}$.

Denotiamo con $(\bar{\rho}_1, \cdots, \bar{\rho}_n)$ la n–pla minima di interi tale che risulti

$$z_1^{\bar{\rho}_1} \cdots z_n^{\bar{\rho}_n} \in \mathfrak{A}.$$

Poiché $z_1^{s_1} \cdots z_n^{s_n} \in \mathfrak{A}$, risulta $(\bar{\rho}_1, \cdots, \bar{\rho}_n) \leq (s_1, \cdots, s_n)$. Segue poi, dal teorema 1: $(\bar{\rho}_1, \cdots, \bar{\rho}_n) \geq (s_1, \cdots, s_n)$; e da qui l'asserto.

BIBLIOGRAFIA.

[1] VECCHIO G., *Sugli ideali di classe principale e il Teorema degli zeri di Hilbert*. In corso di stampa presso « Le Matematiche », vol. XX, fasc. I.

[2] ZARISKI O.–SAMUEL P., *Commutative algebra*, vol. I. Van Nostrand, 1958.