Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Miron Nicolescu

Sur certaines applications linéaires et continues de l'espace des fonctions continues en lui-même

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 374–376.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_374_0>

Analisi funzionale. — *Sur certaines applications linéaires et continues de l'espace des fonctions continues en lui-même.* Nota di MIRON NICOLESCU, presentata [(*)] dal Socio M. PICONE.

1. Nous désignerons, dans la suite, par **C** ([o , 1]), ou simplement par C, l'espace des fonctions continues réelles définies sur le segment [o , 1].

Pour tout $f \in$ C, nous poserons

$$\mathbf{H}f(r) = \begin{cases} f(0)\,, & \text{si } r = 0\,, \\ \displaystyle\int_0^r \mathrm{H}\,[(r\,,r')\,f(r')\,dr'\,, & \text{si } r \in [0\,,1]\,, \end{cases}$$

où H est une fonction positive continue dans [o , 1] × [o , 1], vérifiant en plus la condition

$$\int_0^r \mathrm{H}\,(r\,,r')\,dr' = 1 \quad , \quad r \in [0\,,1]\,.$$

Nous avons montré ailleurs [2] que $\mathbf{H}f$ est une application linéaire et bonnée de C ([o , 1]) en lui-meme, avec $\| \mathbf{H} \| \leqq 1$.

Il s'ensuit que la fonction $r \to h(r) = \mathbf{H}f(r)$ est continue en tout point de [o , 1], même au point o.

Le but de cette Note est de présenter quelques remarques supplémentaires sur l'opérateur **H**.

2. THÉOREME 1. – *L'application* $f \to \mathbf{H}f$ *est une injection, même dans l'espace* C_0 *des fonctions continues dans* [o , 1], *nulles à l'origine.*

Soient, respectivement, $f' \in C_0$, $f'' \in C_0$, avec $f' \neq f''$. Posons $f = f' - f''$. L'équation

$$\mathbf{H}f(r) = 0$$

est vérifiée pour $r = 0$. Si $r \neq 0$, on doit avoir

$$\int_0^r \mathrm{H}\,(r\,,r')\,f(r')\,dr' = 0\,,$$

quel que soit r. Soit alors r_0 un point pour lequel $f(r_0) \neq 0$ (un tel point existe, par hypothèse). Nous pouvons toujours supposer $f(r_0) > 0$. Soit alors

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

$[r_1, r_2]$ un intervalle contenant le point r_0, dans lequel $f > 0$. On aura

$$0 = \int_0^r \mathrm{H}(r, r') f(r') \, dr' = \int_0^{r_1} \mathrm{H}(r, r') f(r') \, dr' +$$

$$+ \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{H}(r, r') f(r') \, dr' = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{H}(r, r') f(r') \, dr',$$

ce qui est absurde. Ainsi donc, en tout point de $[0, 1]$ on a $f = 0$, d'où $f' = f''$. L'hypothèse que $f' \neq f''$ implique $\mathbf{H} f' \neq \mathbf{H} f''$ conduit donc à une contradiction.

COROLLAIRE. – *L'équation* $\mathbf{H} f = 1$ *a la seule solution* $f = 1$.

3. Le corollaire précédent montre que l'application $f \to \mathbf{H} f$ a au moins un point fixe, savoir la fonction constante égale à un. Il en résulte évidemment que toutes les fonctions constantes sont des points fixes de cette application. Existe-t-il d'autres points fixes ?

La réponse est négative:

THÉORÈME 2. – *L'application* $f \to \mathbf{H} f$ *de l'espace* C *en lui-meme n'a d'autres points fixes que les constantes.*

En effet, soit $f \in \mathrm{C}$, telle que

$$\mathrm{H} f = f.$$

On en déduit, par itération,

$$\mathbf{H}^n f = f,$$

quel que soit le nombre naturel n. Mais nous avons montré dans un travail antérieur [2] que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{H}^n f(r) = f(0),$$

uniformément par rapport à r dans $[0, 1]$. Ainsi donc

$$f(r) = f(0) = \text{const.}$$

4. On pourrait penser que si l'on se débarrasser de la condition « de normalité »

$$\int_0^r \mathrm{H}(r, r') \, dr' = 1,$$

on parviendrait à d'autres résultats. Posons donc

$$\int_0^r \mathrm{H}(r, r') \, dr' = \varphi(r).$$

Évidemment, $\varphi > 0$. Nous supposerons, de plus, pour obtenir une contraction, que

$$\sup_{r \in [0,1]} \varphi(r) = \alpha < 1 .$$

Dans ces conditions, il est facile de voir que

$$\| \mathbf{H} \| \leqq \alpha < 1 ,$$

donc

$$\| \mathbf{H}(f - g) \| \leqq \alpha \; \| f - g \|$$

et **H** est bien un contraction. Comme l'espace C est complet, **H** a un point fixe et un seul. Mais ce point fixe unique est visible, puisque **H** est une application linéaire: c'est la constante nulle.

Ainsi, nous n'obtenons pas un résultat nouveau concernant les points fixes, si l'on se débarrasse de la condition de normalité précédente.

BIBLIOGRAFIA.

[1] NICOLESCU MIRON, *Sur les moyennes généralisées successives d'une fonction*, « Revue Math. pures et appl. de l'Académie de la R.P.R. », VI, 429–441 (1961).

[2] NICOLESCU MIRON et FOIAŞ CIPRIAN, *Sur les moyennes généralisées successives d'une fonction*, «Mathematica, Cluj», vol. 4 (27), 107–121 (1962).

[3] NICOLESCU MIRON, *Extension dú théorème de Gauss aux fonctions harmoniques d'ordre p* «C. R. Ac. Sc. Paris», *191*, p. 515 (1930).