Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Conti

Su un teorema di Ky Fan

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 371–373.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_371_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Analisi funzionale. — *Su un teorema di Ky Fan.* Nota di ROBERTO CONTI, presentata [*] dal Socio G. SANSONE.

1. Nella teoria dei controlli lineari trova applicazione un teorema dovuto a Ky Fan (*On systems of linear inequalities*, «Annals of Math. Studies», N. 38, pp. 99–156, Princeton Univ. Press, 1956; Th. 23).

Dalla stessa teoria risulta anche l'opportunità di un'estensione, rappresentata dal Teorema 3 di questa Nota. I risultati qui conseguiti troveranno applicazione in successivi lavori.

2. Siano U, X due spazi lineari (reali o complessi), normati, e sia $\Lambda : U \to X$ un operatore lineare, continuo.

Dati un punto $\chi \in X$, un numero $\rho > 0$ ed un insieme $K \subset X$, limitato, convesso e simmetrico rispetto all'origine di X, ha interesse stabilire se esistono $u \in \rho U_1$ (U_1 sfera unitaria di U) tali che $\Lambda u \in \chi + K$. Detta ΛU_1 l'immagine di U_1 rispetto a Λ, ciò equivale a stabilire se

$$\chi \in \rho \Lambda U_1 + K. \tag{1}$$

3. Diamo adesso una condizione necessaria e sufficiente affinché, in luogo della (1), valga la relazione, in generale più debole della (1),

$$\chi \in \overline{\rho \Lambda U_1 + K}. \tag{2}$$

Osserviamo che $\rho \Lambda U_1$, K, $\rho \Lambda U_1 + K$ sono insiemi limitati, convessi e simmetrici di X e che ad un insieme C che ha queste proprietà si può associare una funzione $H_C(y^*)$, detta funzione supporto di C, definita da

$$H_C(y^*) = \sup \{ |y^* x| : x \in C \}, \qquad y^* \in X^* \tag{3}$$

nello spazio duale X^*.

Si provano facilmente le seguenti relazioni

$$H_{\bar{C}}(y^*) = H_C(y^*), \tag{4}$$

$$|y^* \chi| \leq H_C(y^*), y^* \in X^* \iff \chi \in \bar{C}, \tag{5}$$

$$H_{\alpha C + \beta K}(y^*) = \alpha H_C(y^*) + \beta H_K(y^*). \tag{6}$$

Da quest'ultima si ha, in particolare

$$H_{\rho \Lambda U_1 + K}(y^*) = \rho H_{\Lambda U_1}(y^*) + H_K(y^*).$$

D'altronde

$$H_{\Lambda U_1}(y^*) = \sup \{ |y^* x| : x \in \Lambda U_1 \} = \sup \{ |y^* \Lambda u| : u \in U_1 \} = |\Lambda^* y^*|_{U^*},$$

(*) Nella seduta del 12 dicembre 1964.

dove U^* è lo spazio duale di U e dove $\Lambda^* : X^* \to U^*$ è l'operatore aggiunto di Λ.

Pertanto da (5) segue il

TEOREMA 1. – *La disuguaglianza*

$$|y^* \chi| \leq \rho\, |\Lambda^* y^*|_{U^*} + H_K(y^*)\,, \qquad y^* \in X^* \tag{7}$$

equivale alla relazione (2).

In particolare, se X_1 indica la sfera unitaria di X si ha

$$H_{X_1}(y^*) = |y^*|_{X^*}$$

quindi se $K = \varepsilon X_1$, $\varepsilon \geq 0$, abbiamo il

TEOREMA 2. – *La disuguaglianza*

$$|y^* \chi| \leq \rho\, |\Lambda^* y^*|_{U^*} + \varepsilon\, |y^*|_{X^*}\,, \qquad y^* \in X^* \tag{8}$$

equivale alla relazione ($\varepsilon \geq 0$)

$$\chi \in \overline{\rho\, \Lambda U_1 + \varepsilon X_1}\,. \tag{9}$$

4. Affinché $\rho \Lambda U_1 + K$ sia chiuso non basta che siano chiusi entrambi gli insiemi ΛU_1 e K (cfr. ad esempio G. Köthe, *Topologische lineare Räume*, Springer Verlag, 1960, p. 325).

D'altronde ciascuno degli insiemi convessi ΛU_1, K, $\rho \Lambda U_1 + K$ è chiuso se e soltanto se esso è debolmente chiuso (cfr. ad esempio N. Dunford–J. T. Schwartz, *Linear operators*. Part I: *General theory*, Interscience Publishers, Inc., 1958, p. 422, Th. 13).

Supponiamo allora che uno dei due insiemi ΛU_1, K sia (debolmente) chiuso e l'altro sia debolmente compatto. Detto $\tilde{X}$ lo spazio lineare topologico, localmente convesso, ottenuto da X sostituendo la topologia debole alla topologia forte, ciò significa che uno dei due insiemi ΛU_1, K è chiuso in $\tilde{X}$ e l'altro è compatto in $\tilde{X}$. Ma allora (cfr. N. Dunford–J. T. Schwartz, loc. cit., p. 414, Lemma 3; oppure G. Köthe, loc. cit., p. 158, (10)) l'insieme $\rho \Lambda U_1 + K$ è chiuso in $\tilde{X}$ e quindi in X.

Pertanto si ha il

TEOREMA 3. – *La disuguaglianza* (7) *equivale alla relazione* (1) *se uno dei due insiemi* ΛU_1, K *è chiuso e l'altro è debolmente compatto*.

Se $K = \varepsilon X_1$, sarà K debolmente compatto se $\varepsilon = 0$, cioè se $K = \{$origine di X$\}$, oppure se $\varepsilon > 0$, ma X è riflessivo (cfr. J. Dieudonné, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, «Annales Éc. Norm. Sup.», 59 (1942), pp. 107–139; p. 130, Th. 24). Da ciò segue il

TEOREMA 4 (Ky Fan, loc. cit.). – *La disuguaglianza* (8) *equivale alla relazione*

$$\chi \in \rho \Lambda U_1 + \varepsilon X_1 \tag{10}$$

se ΛU_1 *è chiuso ed inoltre* $\varepsilon = 0$, *oppure* $\varepsilon > 0$ *e* X *è riflessivo*.

5. Per concludere, diamo una condizione per la compattezza debole di ΛU_1 che ci sarà utile nelle applicazioni. La condizione è che U, X siano spazi di Banach ed inoltre U sia riflessivo, o, più in generale, U sia isometricamente isomorfo al duale V^* di qualche spazio V, lineare, normato.

Sia per esempio U riflessivo, ossia isometricamente isomorfo al secondo spazio duale U^{**}. Ciò significa che esiste un operatore lineare $T : U \to U^{**}$, continuo, 1 — 1, da U sopra U^{**}, tale che $|TU|_{U^{**}} = |u|_U$. Pertanto $TU_1 = U_1^{**}$, sfera unitaria di U^{**}, ossia del duale di U^*, cosicché (cfr. ad esempio G. Köthe, loc. cit., p. 250, (5)) U_1^{**} è debolmente compatta. D'altronde l'operatore inverso $T^{-1} : U_1^{**} \to U$ è continuo rispetto alle topologie (forti) di U, U^{**}, quindi (cfr. N. Dunford–J. T. Schwartz, loc. cit., p. 422, Th. 15) esso è debolmente continuo e quindi $U_1 = T^{-1} U_1^{**}$ è debolmente compatta.

Dall'essere anche X uno spazio di Banach e dall'essere Λ (continuo nelle topologie di U, X e quindi) debolmente continuo segue che ΛU_1 è debolmente compatto.

Se invece di supporre U riflessivo supponiamo soltanto che esso sia isometricamente isomorfo al duale V^* di uno spazio V, lineare, normato, basterà rifare il ragionamento con V al posto di U^*.

Dal teorema 3 segue così il

TEOREMA 5. – *La disuguaglianza* (7) *equivale alla relazione* (1) *se* K *è chiuso e se, inoltre,* U, X *sono spazi di Banach ed* U *è isometricamente isomorfo al duale* V^* *di uno spazio* V, *lineare, normato* (*in particolare* U *è riflessivo*).