Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Livio Gratton

Configurazioni di equilibrio di corpi fortemente implosi. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.6, p. 354–359.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_6_354_0>

Astronomia. — *Configurazioni di equilibrio di corpi fortemente implosi.* Nota II [(*)] del Corrisp. LIVIO GRATTON.

1. Nella Nota anteriore [(1)] sono stati comunicati i risultati dell'integrazione delle equazioni differenziali dell'equilibrio di una distribuzione di materia a simmetria sferica, assumendo valide le equazioni della Relatività Generale e supponendo che la relazione fra la densità e la pressione del fluido sia rappresentata da un'equazione del tipo

$$\rho c^2 = 3\,\mathrm{P} + \mathrm{Q}\mathrm{P}^q, \tag{1}$$

con Q e q (< 1) costanti.

Nella Nota presente questi risultati saranno discussi con riferimento ad alcuni problemi particolari, ma prima è necessario esaminare brevemente un caso limite di notevole interesse.

Quando l'energia di riposo delle particelle che costituiscono la materia diventa trascurabile di fronte alla loro energia cinetica (*caso relativistico estremo*), l'equazione (1) si riduce a

$$\mathrm{P} = \frac{1}{3}\rho c^2. \tag{2}$$

Se allora poniamo, analogamente a I,

$$\left\{\begin{aligned} r &= \mathrm{A}\xi\,, \\ \mathrm{P} &= \mathrm{B}\varphi\,, \\ \frac{2\,\mathrm{G}}{c^2}\,\frac{m}{r} &= \theta\,, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

e teniamo conto della (2), le equazioni (4) di I si riducono a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\xi} &= \xi\varphi - \frac{\theta}{\xi}\,, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= -\frac{2}{3}\,\frac{(3\,\theta/\xi + \xi\varphi)\,\varphi}{1-\theta}\,, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

purché le costanti dimensionali A e B siano scelte in modo da soddisfare la condizione

$$\mathrm{B}\mathrm{A}^2 = \frac{c^4}{24\,\pi\mathrm{G}}\,.$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

(1) L. GRATTON, «Acc. dei Lincei, Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, mat. e naturali» (in stampa); questa Nota sarà citata brevemente nel seguito come I.

Le equazioni (4) devono essere integrate con i valori iniziali

$$\theta = 0 \quad , \quad \varphi = \varphi_c , \qquad \text{per} \quad \xi = 0 .$$

Si può, però, osservare che le (4) ammettono una trasformazione omologica, cioè se si moltiplica la variabile ξ per una costante, α, la φ per $1/\alpha^2$ e si lascia invariata θ, le (4) non cambiano di forma. Ciò permette di fissare una volta per tutte $\varphi_c = 1$, senza perdita di generalità.

Gli sviluppi in serie necessari per iniziare l'integrazione per $\xi = 0$ sono, allora,

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi = 1 - \frac{2}{3} + \xi^2 \frac{2}{9} \xi^4 - \cdots , \\ \theta = \frac{1}{3} \xi^2 \left(1 - \frac{1}{2} \xi^2 + \cdots \right) . \end{cases}$$

Lo studio delle equazioni (4) è particolarmente agevole nel piano delle variabili

$$(6) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{d \log m}{d \log r} , \\ V = - \dfrac{d \log P}{d \log r} . \end{cases}$$

Si vede, invero, facilmente che il sistema (4), a causa delle relazioni di omologia si trasforma nella unica equazione del 1° ordine nelle variabili U e V

$$(7) \qquad \frac{dU}{dV} = - \frac{V}{U} \frac{6 - 10U - 3V - UV}{2(3 + U)(3 - U - V)} ,$$

che è molto simile all'equazione del caso isotermo classico, come deve essere.

L'andamento della soluzione della (7) corrispondente ad un valore finito di φ al centro è stato indicato nelle figure 1 e 2 della Nota I, perché naturalmente il caso relativistico estremo corrisponde al caso limite dell'equazione (1) quando $Q \to 0$ o, in un certo senso, quando il valore di φ_c, nelle equazioni della Nota I, diviene grandissimo, perché allora il primo termine nel secondo membro della (1) diviene prevalente sopra la maggior parte della configurazione.

Ora, è facile vedere che la (7) possiede un punto singolare nel punto $U = 1$, $V = 2$, che ha il carattere di un «vortice»; la soluzione che ci interessa si avvolge a spirale intorno a questo punto, senza raggiungerlo per nessun valore finito di ξ.

Questo significa, fisicamente, che una distribuzione sferica di materia relativistica estrema non può possedere un contorno, ma deve estendersi fino a distanza infinita, come avviene anche per la sfera isoterma nel caso classico. Inoltre, anche la massa totale è infinita.

Tuttavia, il valore di θ è sempre finito e tende al valore $3/7 = 0.429$ quando $\xi \to \infty$, passando attraverso una successione infinita di massimi e minimi (corrispondenti ai punti in cui $U = 1$). Il primo massimo a partire da $\xi = 0$, che è anche il massimo assoluto di θ, risulta uguale a 0,493, in base all'integrazione numerica delle equazioni.

2. L'esistenza di questo massimo di θ nella configurazione relativistica estrema ha una conseguenza di grande interesse teorico.

Dalle equazioni generali dell'equilibrio (4) della Nota I, si vede infatti che un punto nell'interno di una configurazione in cui $\theta = 1$, deve corrispondere ad una situazione fisica anormale, perché per $\theta = 1$ il gradiente della pressione diviene infinito.

Direttamente questo si ricava anche dall'equazione (7) della I, da cui risulta che per $\theta = 1$, $e^{-\lambda} = 0$; richiamandosi al significato di e^{λ} quale coefficiente di dr^2 nell'elemento lineare

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\Phi^2) - e^{\lambda} dr^2,$$

si vede allora che nei punti in cui $\theta = 1$, la velocità della luce misurata in un sistema di riferimento associato alle coordinate r, θ, Φ, t deve annullarsi mentre, naturalmente, in un sistema di riferimento proprio risulta sempre uguale a c. È invalso l'uso di chiamare *singolarità di Schwarzschild* una situazione come quella descritta.

Una singolarità di Schwarzschild non è una singolarità matematica vera e propria, perché la curvatura geometrica dello spazio–tempo è sempre finita ed anche dal punto di vista fisico il suo significato non è ben chiaro. Per esempio, per un osservatore lontano una particella che cada verso una singolarità di Schwarzschild impiega un tempo infinito per raggiungerla (perché la sua velocità apparente tende a zero); d'altra parte, per un osservatore in moto con la particella, il tempo per raggiungere la singolarità è finito. Ciò è dovuto, naturalmente, alla differenza fra il tempo t ed il «tempo proprio» della particella.

Così pure, una riga spettrale emessa da un atomo che si trovi sopra una singolarità di Schwarzschild apparirebbe «infinitamente spostata verso il rosso», cioè la frequenza misurata da un osservatore lontano sarebbe nulla; la riga non sarebbe quindi osservabile. In altre parole, nessun segnale può provenire da punti situati sopra una singolarità di Schwarzschild.

Questa situazione sembra a molti fisicamente assurda e porta, effettivamente a molte difficoltà, segnalate, fra gli altri da Wheeler (2) e coll.; è pertanto interessante osservare che lo studio del modello politropico compiuto in queste note mostra che una singolarità di Schwarzschild molto difficilmente potrebbe esistere in natura, per lo meno in configurazioni statiche.

(2) J. A. WHEELER ed altri, *Gravitational Collapse and Bayron conservation*, citato in I, nota (4).

Invero, è facile vedere che in una configurazione politropica del tipo di quelle studiate in I, θ è nullo al centro, cresce verso l'esterno fino ad un certo massimo θ_m (in corrispondenza ad $U = 1$) e poi decresce fino alla superficie. D'altra parte se consideriamo la famiglia di configurazioni corrispondenti ad un indice politropico n dato, si trova (benché non esista per ora una prova rigorosa) che θ_m cresce monotonicamente al crescere del parametro centrale φ_c. Ma la configurazione relativistica estrema è, come notato, un caso limite di ogni famiglia di configurazioni politropiche corrispondente ad un valore molto grande di φ_c.

Ne segue che per nessuna famiglia politropica θ_m può superare il valore massimo corrispondente alla configurazione relativistica estrema, cioè 0,493. In pratica in tutte le configurazioni calcolate in I, si è trovato un valore di θ_m considerevolmente al di sotto di questo limite.

Incidentalmente questo dimostra che l'energia di legame di una configurazione statica non può superare una certa frazione dell'energia propria. Infatti dalla (16) della nota I, si ricava

$$\frac{M(R)}{M} = \frac{1}{\mu_1}\int_0^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{1-\theta}} \leq \frac{1}{\mu_1}\int_0^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{1-\theta_m}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-0{,}493}} = 1.41\,.$$

Quindi la differenza fra M (R) ed M non può superare il 40 %; questa è dovunque la massima frazione della massa di una certa quantità di materia che può essere convertita in energia per mezzo di una contrazione gravitazionale quasistatica a partire da una configurazione dispersa all'infinito.

È da notare, però, che questa frazione è molto maggiore di quella che si può trasformare in energia attraverso reazioni nucleari, la quale non può superare l'1 %.

3. La *stabilità* dell'equilibrio delle configurazioni studiate merita una considerazione molto attenta. Qui si considera solo la stabilità per vibrazioni radiali.

A tale scopo si deve partire dalle equazioni generali (2) della Nota I trascurando i termini in v^2 e nei quadrati delle derivate rispetto a t. Sia ξ lo spostamento di un elemento di fluido rispetto alla posizione di equilibrio, δP e $\delta\varepsilon$ le (piccole) variazioni di P ed ε dovute alle vibrazioni. Allora l'ultima delle equazioni (2) di I porge

$$e^{-\lambda}\,\delta\dot{\lambda} = -\,K\,(P+\varepsilon)\,r\dot{\zeta},$$

ricordando la (3) della Nota I. Qui $\delta\lambda$ indica la piccola variazione di λ dovuta allo spostamento ζ. Questa equazione può essere integrata ottenendo

$$e^{-\lambda}\,\delta\lambda = -\,K\,(P+\varepsilon)\,r\zeta, \tag{8}$$

assumendo $\zeta = 0$ per $t = 0$.

Per mezzo della (8) si ottengono ora facilmente le equazioni delle piccole oscillazioni

$$\frac{P+\varepsilon}{c^2} e^{\lambda-\nu} \ddot{\zeta} + \delta P' + \tag{9}$$

$$+ \frac{1}{2}(\lambda' + \nu')\,\delta P + \frac{1}{2}\nu'(\delta P + \delta\varepsilon) - \frac{1}{2}(\lambda' + \nu')\left(\nu' + \frac{1}{r}\right)(P+\varepsilon)\,\zeta = 0,$$

$$\delta\varepsilon = -\frac{1}{r^2}\left[r^2 (P+\varepsilon)\,\zeta\right]' \tag{10}$$ [3].

Se ora si impiega l'equazione (1) per eliminare δP e $\delta\varepsilon$, da (9) e (10) si ottiene una equazione lineare alle derivate parziali che dà luogo ad un tipico problema di Sturm–Liouville. Con metodi classici [4], dopo un certo numero di passaggi piuttosto tediosi si perviene alla seguente equazione agli autovalori:

$$\frac{\sigma^2}{c^2}\int_0^R e^{\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu}\,\frac{\eta^2\,dr}{r^2 (P+\varepsilon)} = \tag{11}$$

$$= \int_0^R e^{\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}\,\frac{1}{r^2(P+\varepsilon)}\,\frac{dP}{d\varepsilon}\left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2 dr - \frac{K}{2}\int_0^R e^{\frac{5}{2}\lambda + \frac{1}{2}\nu}\left(KP + \frac{1}{r^2}\right)\eta^2\,dr.$$

Il significato di questa equazione è il seguente: per ogni possibile funzione η di r che soddisfa le condizioni al contorno, $\eta = 0$ per $r = 0$ e per $r = R$, quella che rende minimo il valore di σ^2 ricavato dalla (11) è l'autofunzione del problema (a parte un fattore di normalizzazione) relativa alla vibrazione fondamentale ed il valore minimo di σ^2 è il quadrato della frequenza corrispondente. La condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è naturalmente che questo minimo sia positivo, cioè che la frequenza sia reale.

Assumendo valida la relazione (1) e passando alle variabili ξ, φ, θ di I, la (36) si trasforma nella equazione

$$\frac{\omega^2}{1-\theta_1}\int_0^{\xi_1} \frac{(1+4\varphi)^{(n-3)/4}}{\xi^2 \varphi^n (1-\theta)^{3/2}}\,\eta^2\,d\xi = \tag{12}$$

$$= \int_0^{\xi_1} \frac{1}{\xi^2 \varphi^{n-1} (1+4\varphi)^{(n+5)/4}\left(\dfrac{n}{n+1} + 3\varphi\right)(1-\theta)^{1/2}}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 d\xi -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{\xi_1} \frac{\xi^2 \varphi^{n+1} + 1}{\xi^2 (1+4\varphi)^{(n+1)/4} (1-\theta)^{5/2}}\,\eta^2\,d\xi,$$

(3) S. CHANDRASEKHAR, « Phys. Rev. Lett. », *12*, 114 (1964); « Phys Rev. Lett. », *12* (E), 437 (1964).

(4) R. COURANT e D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, I, 344 sg. (1931).

dove si è posto, per brevità, $\omega = A\sigma/c$. Siccome tutti gli integrandi sono essenzialmente positivi, la condizione di stabilità è che il primo integrale a 2^0 membro sia maggiore della metà del secondo per qualunque funzione η che si annulli al contorno.

In pratica in casi simili si suole assumere per η una « funzione di prova » conveniente. Se per questa $\omega^2 < 0$, ovviamente, il sistema è instabile; se $\omega^2 > 0$, invece, non si può affermare che il sistema sia stabile, poiché è possibile che con un'altra scelta di η, ω^2 sia negativo. Pertanto il calcolo dà solo una condizione sufficiente per la instabilità.

Una scelta conveniente di η è

$$\eta = \xi^3 \varphi (1 + 4\varphi),$$

cioè

$$\eta \sim r^2 (P + \varepsilon).$$

Il calcolo mostra allora che tutte le configurazioni corrispondenti ad $n = 3$ ed anche molte delle configurazioni corrispondenti ad $n = 3/2$ sono instabili. Le sole configurazioni calcolate in I e (probabilmente) stabili sono quelle per $n = 3/2$ e $\varphi_c < 0{,}2$.

Questo risultato non era inatteso, in vista del fatto che le politropiche ordinarie con $n > 3$ sono instabili e quella con $n = 3$ è « indifferente ».