Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Valentino Tomelleri

Nuove modalità per una determinazione astronomica simultanea di latitudine ed azimut

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.5, p. 272–280.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_5_272_0>

Geodesia. — *Nuove modalità per una determinazione astronomica simultanea di latitudine ed azimut.* Nota di VALENTINO TOMELLERI, presentata [*] dal Socio L. SOLAINI.

1. Sono, in generale, note le difficoltà di Catalogo per un programma di coppie di stelle da osservarsi in meridiano per la determinazione della sola latitudine secondo il classico metodo di Horrebow–Talcott. Tra esse, l'eterogeneità e la limitata precisione delle declinazioni delle stelle scelte dal ricco *General Catalogue* di B. Boss per il 1950.0, e la conseguente necessità d'aggiornarle all'epoca delle osservazioni, la scarsezza invece di coppie rispondenti alle note limitazioni degli intervalli di tempo e di distanza zenitale fornite dall'annualmente aggiornato *Apparent places of fundamental stars*, le incerte riduzioni per stelle eventualmente scelte da Cataloghi diversi. Tali difficoltà restano presenti, in buona parte, pure nelle sue generalizzazioni, mediante coppie circummeridiane od extrameridiane e qualche variante operativa, proposte da Villarceau, Pewzow–Stechert, Garavito [1].

Negli ultimi decenni, d'altra parte, si sono nel campo pratico rivalutati ed affermati metodi, teoricamente già noti e poco o punto in precedenza sperimentati, per determinazioni contemporanee di due o più elementi geografici (latitudine, longitudine, direzione meridiana); il loro successo si deve pure, oltre che ad una moderna e più precisa strumentazione, all'assenza quasi totale di particolari limitazioni restrittive d'accoppiamento, di tempo, ecc. per le stelle da osservare, permettendo così, con un programma abbastanza libero, d'abbreviare vantaggiosamente l'esecuzione delle stazioni di campagna che non richiedano, per particolari motivi, quella elevata precisione conseguibile con metodi di determinazione singola.

È pure nota la tecnica operativa di osservazione nel metodo di Horrebow–Talcott che, trascurando il cerchio verticale ed assegnando al cronometro una funzione solamente indicativa per il passaggio in meridiano delle stelle e non di misura, come invece avviene per le altre sue generalizzazioni prima ricordate, comporta il ricorso a sensibili livelle zenitali ed a puntate micrometriche plurime con il micrometro oculare per una più precisa valutazione della variazione di distanza zenitale.

In questa Nota si presenta un metodo che cerca di conciliare tali esigenze, e cioè una stretta generalizzazione, anche se non per coppie di stelle, del metodo di Horrebow–Talcott, la quale ne adotti abbastanza fedelmente

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

(1) THÉODORE NIETHAMMER, *Die genauen methoden der Astronomisch–Geographischen Ortbestimmung*, Verlag Birkhäuser, Basel 1947, III Kap. *b*) e *c*); PIERRE TARDI–GEORGES LACLAVÈRE, *Traité de Géodésie*, Tome II, *Astronomie géodésique de position*, Gauthier–Villars Edit., Paris 1955, §§ 144, 145, 159, 160.

la tecnica d'osservazione, permetta un'ampia scelta di stelle dall'*Apparent places of fundamental stars* e nel contempo consenta la determinazione di altro elemento geografico, e cioè la direzione meridiana.

Trattasi, in definitiva, di osservare con particolari modalità un prescelto gruppo di stelle, almeno tre, in piani verticali qualsivoglia, anche distanti dal meridiano, ed alle corrispondenti distanze zenitali.

Tali modalità sono appunto: *a*) osservazioni ad una altezza costante; *b*) uso delle livelle di Talcott; *c*) ripetute puntate micrometriche d'altezza con il reticolo a filo mobile. La *a*) mira alla eliminazione, nelle misure stellari, del cerchio verticale, meno sensibile e quasi sempre meno studiato del cerchio azimutale; le *b*) e *c*) consentono una più precisa misura delle deviazioni dalla zenitale costante d'osservazione; così che, data la *a*), la correzione per la rifrazione astronomica conserva, anche qui come in altri metodi, il carattere differenziale.

2. Scelta la distanza zenitale vera z_0 da tenersi costante per le osservazioni, e noto un valore sufficientemente approssimato φ_a della latitudine $\varphi = \varphi_a + \Delta\varphi$ della stazione astro–geodetica, note formule permettono di avere i valori approssimati: A_a dell'azimut $A = A_a + \Delta A$; H_a dell'angolo orario H e t_a del tempo sidereo locale; q_a dell'angolo parallattico q, contati tutti al solito modo astronomico, che competono alla stella prescelta S $(\alpha = \alpha_a + \Delta\alpha\,,\ \delta = \delta_a + \Delta\delta)$ quando raggiunge l'altezza $90^o - (z_0 + \Delta z)$ sull'orizzonte della stazione approssimata $(\varphi_a\,,\ \lambda_a)$, ad est o ad ovest.

Dall'equazione fondamentale:

$$\text{sen}\,\delta = \text{sen}\,\varphi\cdot\cos z - \cos\varphi\cdot\text{sen}\,z\cdot\cos A$$

segue per differenziazione, supposti negligibili i termini d'ordine superiore al primo in $\Delta\delta$, $\Delta\varphi$, Δz e ΔA, l'equazione di condizione:

$$\cos H_a\cdot\Delta\varphi + \text{sen}\,H_a\cdot\cos\varphi_a\cdot\Delta A - \cos q_a\cdot\Delta z = \Delta\delta\,.$$

Per quanto concerne le variazioni azimutale ΔA e zenitale Δz, siano intanto:

$L = L_a + \Delta L$ la lettura sul cerchio orizzontale, nelle condizioni strumentali e d'ambiente del momento, corrispondente al passaggio della stella osservata per il filo centrale azimutale;

$M = M_a + \Delta M$ la lettura meridiana, sul cerchio orizzontale, a strumento corretto, corrispondente al sud–geografico;

i l'inclinazione, rispetto all'orizzonte, dell'asse mobile del teodolite da assumersi positiva o negativa secondo che sia rispettivamente sopra o sotto l'orizzonte quell'estremo di detto asse che, in una determinata posizione strumentale, trovasi alla destra di un osservatore che guardasse ad occhio nudo alla stella collimata con il cannocchiale;

c l'errore di collimazione intrinseco da assumersi positivo o negativo secondo che risulti maggiore o minore di 90^o, rispettivamente, l'angolo tra l'asse di collimazione diretto al punto (celeste o terrestre) osservato e l'asse mobile orientato verso la destra dell'osservatore disposto come poc'anzi affermato;

$z_v = z_0 + \Delta z = z + R$ la distanza zenitale vera della posizione apparente z, alterata della rifrazione astronomica R del momento, della stella S, nella stazione astro–geodetica effettiva;

Δz_l la variazione, dalla zenitale costante prefissata nelle osservazioni, del filo (centrale) di riferimento d'altezza e rilevabile con le livelle di Talcott;

Δz_m la differenza di distanza zenitale, misurabile con il micrometro oculare a filo mobile, tra il filo (centrale) di riferimento per l'altezza e la stella all'atto del suo passaggio per il filo centrale (non corretto) azimutale;

$\Delta R = R - R_{om}$ la correzione differenziale di rifrazione rispetto alla correzione (incognita) R_{om} relativa alle condizioni termo–barometriche medie;

Δz_0 una correzione incognita costante per la puntata zenitale dovuta ad errori di graduazione del cerchio verticale e relativo micrometro nel settore utilizzato, ad uno zero convenzionale per le livelle di Talcott e per il micrometro filare, ad un errore di flessione del cannocchiale, ecc.

Ne seguono allora le relazioni principali:

$$\Delta A = \Delta L - i \cdot \cot z_0 - c \cdot \csc z_0 - \Delta M,$$

$$\Delta z = -\Delta\zeta + \Delta z_l + \Delta z_m + \Delta R,$$

essendosi assunto: $L_a = A_a + M_a$ per la lettura orizzontale approssimata di puntata, e: $\Delta\zeta = -(\Delta z_0 + R_{om})$ quale incognita ausiliaria costante.

La precedente equazione di condizione porge allora per la determinazione delle due incognite principali $\Delta\varphi$, ΔM e della secondaria $\Delta\zeta$:

$$\cos H_a \cdot \Delta\varphi + \operatorname{sen} H_a \cdot (-\cos \varphi_a \cdot \Delta M) + \cos q_a \cdot \Delta\zeta = \Delta\delta +$$

$$+ (c + i \cdot \cos z_0 - \Delta L \cdot \operatorname{sen} z_0) \operatorname{sen} q_a + (\Delta z_l + \Delta z_m + \Delta R) . \cos q_a .$$

La variazione $\Delta\delta$ s'intende comprensiva anche dell'effetto della abberrazione diurna ovviamente non incluso nel valore apparente della declinazione desumibile dalle effemeridi.

Per c basterà assumere il valore apparente c_a determinabile nel modo ben noto mediante osservazioni coniugate; è da sottolineare soltanto la precedente convenzione sul segno d'assegnare a c, che viene perciò a variare cambiando la giacitura strumentale.

L'inclinazione i dell'asse mobile, per una fissata posizione strumentale, sarà data in valore e segno dalla

$$i = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4}{4} \cdot \sigma,$$

se σ è la sensibilità della livella di detto asse ed l_1, l_2, l_3, l_4 le quattro letture agli estremi della bolla nelle due posizioni invertite della livella, sempre che in ciascuna posizione si orienti la graduazione, a zero centrale o laterale, in senso algebricamente crescente dalla sinistra alla destra dell'osservatore disposto come sopra detto per il segno di i.

Se σ_T è la sensibilità della livella di Talcott, ed l_s, l_0 le letture corrispondenti ai baricentri della bolla, come medie delle letture agli estremi, rispettivamente nella posizione d'equilibrio per l'osservazione della stella S ed in un'altra qualsivoglia posizione convenzionale, si avrà:

$$\Delta z_l = \pm (l_s - l_0) \cdot \sigma_T \begin{cases} + (\mid \text{o} - \text{ob.}) \\ - (\text{o} \mid \text{ob.}) \end{cases}$$

valendo il segno superiore + o l'inferiore — secondo che lo zero della graduazione stia dalla stessa parte (| o — ob.) o dalla parte opposta (o | ob.) dell'obbiettivo rispetto al piano verticale contenente l'asse mobile.

La variazione zenitale micrometrica Δz_m è data invece dalla:

$$\Delta z_m = \pm (\overline{m} - m_0) \cdot \mu + \overline{n} \cdot \mu \begin{cases} + (g \downarrow \downarrow z) \\ - (g \uparrow \downarrow z) \end{cases}$$

essendo: m_0 la lettura micrometrica costante, arrotondata all'unità di rivoluzione, che spetta al filo (centrale) d'altezza di riferimento; $\overline{m}$ la media aritmetica delle letture micrometriche m_r relative alle puntate, con il filo mobile d'altezza, alla stella S all'atto dei suoi passaggi per i fili fissi azimutali laterali ausiliari e per il centrale cui si riferisce la lettura azimutale L; $\overline{n}$ la media aritmetica delle riduzioni n_r al filo centrale azimutale spettante alle letture ausiliarie m_r ai fili laterali; μ il passo del micrometro; ed assumendosi infine il segno superiore + o l'inferiore — secondo che la graduazione (g) del micrometro cresce con le distanze zenitali ($g \downarrow \downarrow z$) e con le altezze ($g \uparrow \downarrow z$) sull'orizzonte, rispettivamente.

Le quantità $n_r \mu$ sono calcolabili con apposite formule finite rigorose od anche per serie, che ne mettono in evidenza la parte dovuta alla curvatura del parallelo celeste, generalizzanti la nota formula di « riduzione al filo centrale o correzione di curvatura del parallelo » utilizzata nei metodi di Horrebow–Talcott e Pizzetti–Sterneck [2].

Si riporta qui, al momento, l'espressione approssimata finale della media $\overline{n} \cdot \mu$ in particolari ipotesi semplificative: il filo mobile, cioè, d'altezza non presenti errore d'ortogonalità nei riguardi dei fili fissi azimutali e la stessa S (α, δ) sia stata puntata con il filo mobile, oltre che all'atto del suo passaggio al filo centrale azimutale, anche ad N coppie di fili azimutali laterali simmetrici, o quasi tali a meno di piccole quantità, rispetto a detto centrale. Indicate con a_r'' le distanze filari angolari (espresse in secondi) tra i vari fili fissi laterali azimutali ed il filo centrale pure azimutale, assumendo quest'ultimo come

(2) V. TOMELLERI, *Effetto della curvatura del parallelo celeste nella misura micrometrica di distanze zenitali in piani verticali extra massima digressione*, « Bollettino di Geodesia e Scienze affini », I.G.M., Anno XXIII (1964), n. 4.

origine e il verso proveniente da quello degli azimut crescenti quale verso positivo, si avrà allora nelle predette ipotesi:

$$(\bar{n}\cdot\mu)''=-\frac{\Sigma a''_r}{2N+1}\cdot\tan Q+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Sigma a''^2_r}{2N+1}\operatorname{sen}1''\cdot\sec^3 Q\cdot\tan\delta+$$

$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{\Sigma a''^4_r}{2N+1}\operatorname{sen}^3 1''\cdot\sec^3 Q\cdot\tan\delta\cdot[3\sec^4 Q\tan^2\delta(3-2\cos 2Q)+9\tan^2 Q-1]+$$
$$+\text{ termini di ordine superiore pari in } a''_r,$$

essendosi posto:

$$Q=q_a+\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} i\cdot\sec c\cdot\csc z+\tan c\cdot\cot z)$$

ove per *arc sen* s'assuma il valore prossimo allo zero.

Solo in casi piuttosto eccezionali (δ e Q elevati: la presenza di sec Q sconsiglia infatti osservazioni prossime alle massime digressioni orientale ed occidentale), il complesso dei termini pari di sesto ordine, e superiori, può raggiungere quantità non trascurabili; per $\delta=+80^\circ$, $Q=+86^\circ$ ed $a''_r=\pm 60''$, esso vale, all'incirca, $+5''$.

Per quanto riguarda, infine, la variazione ΔR di rifrazione rispetto alle condizioni termo–barometriche medie ed alla zenitale apparente assunta come costante, l'usuale prassi differenziale porta a concludere che, per l'ammontare delle variazioni zenitali intervenienti al secondo membro dell'equazione generata, devesi porre, in media:

$$\Delta z_l+\Delta z_m+\Delta R=1{,}00029\cdot\sec^2 z\,.(\Delta z_l+\Delta z_m)''+\Delta R_{tp},$$

essendo ΔR_{tp} la parte di ΔR relativa alle variazioni termo–barometriche, sempreché sensibilità della livella di Talcott, passo del micrometro e distanze filari non siano già state modificate per l'effetto di rifrazione normale alla zenitale prescelta.

3. Alquanto complessa, per le molteplici grandezze intervenienti, variabili da stella a stella, da strumento a strumento, è la questione d'accertare a *priori* se la forma dell'equazione generata sopra scritta sia di peso costante.

Una dettagliata analisi dei vari termini e grandezze presenti al suo secondo membro porta a concludere per il suo errore quadratico medio (e.q.m.) E, *a priori*, una espressione quadratica del tipo:

$$E^2=\frac{1}{P}\cdot\left(\frac{v}{I}\right)^2+\varepsilon^2,$$

essendo: $v=50''\sim 70''$ l'acuità visiva, I l'ingrandimento angolare del cannocchiale utilizzato, P il numero delle puntate micrometriche effettuate e cioè il numero dei fili azimutali sul cui attraversamento s'è puntato il filo mobile d'altezza, ed ε^2 la parte, teoricamente variabile da stella a stella, derivante dalle altre grandezze strumentali o misurate affette da errore.

Assumendo come strumento tipo il moderno Universale Wild T 4, con 60 d'ingrandimento circa, dotato di una coppia di livelle di Talcott, con il quale osservare ad una zenitale di 30° stelle scelte dall'*Apparent places*, e cioè dal FK 3 ed FK 4, su ciascuna delle quali si effettuino 5 puntate, si constata che anche la parte ε^2, teoricamente variabile da stella a stella, diventa praticamente costante e vale all'incirca 0,09, inferiore, per $P=5$, alla parte costante derivante dall'errore medio delle puntate e cioè $\frac{1}{P}\left(\frac{v}{I}\right)^2 = 0{,}20$, permettendo così in definitiva una stima, *a priori*, dell'e.q.m. unitario E pari a circa $\pm\, 0'',54$.

A tali condizioni, l'equazione generata è ridotta quindi a peso costante. Una tal conclusione resta valida pure per $z_0 = 45^\circ$ e non si andrà di molto errati se la si ritiene tale anche quando si usassero altri strumenti di più modesta precisione, quali lo Zeiss II, il Wild T 2, ecc., resi atti a questo genere di lavoro, data la prevalenza dell'errore medio di puntata sugli altri rimanenti di lettura, graduazione, ecc.

Non pare superfluo avvertire, a proposito della parte $(v/I)^2 \cdot \sec^2 q_a$ di E^2 derivante dall'errore di puntata della stella, con il filo mobile d'altezza all'atto della sua coincidenza con un filo azimutale, che ad essa contribuiscono, indipendentemente fra di loro e sovrapponendosi però l'una all'altra, le due componenti:

a) $(v/I)^2$, relativa alla collimazione della stella con il filo mobile; parte, questa, sempre presente, in pari misura, qualunque sia la direzione del moto apparente della stella, e cioè tanto per osservazioni in meridiano che extra esso;

b) $(v/I)^2 \cdot \tan^2 q_a$, relativa alla coincidenza della stella con il filo azimutale, quale effetto, sulla distanza zenitale da misurare, dell'incertezza $\pm\,(v/I)$ di tale coincidenza per una stella la cui traiettoria apparente sia inclinata di circa $|90^\circ - q_a|$ rispetto a detto filo azimutale.

Ed è appunto per questa inclusione, nell'errore della parte micrometrica Δz_m, dell'effetto zenitale $\pm\,(v/I)\tan q_a$, derivante dall'e.q.m. $\pm\,(v/I)$ di puntata con il filo verticale, che non se ne può far apparire contemporaneamente anche l'effetto azimutale $\pm(v/I)\cdot\csc z_0$ sulla lettura corrispondente orizzontale L.

Secondo, poi, la teoria degli errori per le determinazioni indirette, i quadrati degli e.q.m. delle incognite principali $\Delta\varphi$ e $(\operatorname{sen} z_0 \cdot \Delta M)$, provenienti da n osservazioni indipendenti su altrettante stelle, sono rispettivamente proporzionali alle seguenti forme quadratiche:

$$\left\| \begin{matrix} \operatorname{sen} q_1 & \operatorname{sen} q_2 & \cdots & \operatorname{sen} q_{n-1} & \operatorname{sen} q_n \\ \cos q_1 & \cos q_2 & \cdots & \cos q_{n-1} & \cos q_n \end{matrix} \right\|^2 ,$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi_a - \cos^2 z_0}{\cos \varphi_a \cdot \operatorname{sen} z_0}\right)^2 \cdot \left\| \begin{matrix} \tan \delta_1 & \tan \delta_2 & \cdots & \tan \delta_{n-1} & \tan \delta_n \\ \sec \delta_1 & \sec \delta_2 & \cdots & \sec \delta_{n-1} & \sec \delta_n \end{matrix} \right\|^2 ,$$

assegnando ai simboli matriciali il significato suggerito dal teorema di Binet sul prodotto per righe di matrici simili; relazioni queste, da tenersi presenti, per conseguire così una miglior precisione quando, a parità d'altre condizioni, ci sia una qualche possibilità di scelta di programmi di osservazione che le minimizzano.

Un gruppo di osservazioni stellari isoelevate, in una determinata posizione strumentale, potrà constare di 8–12 stelle discretamente distribuite su tutto l'almucantarat, all'infuori dei settori delle massime digressioni quando sia $|\varphi_a| + z_0 \leq 90^o$.

Nella pratica, le operazioni potranno svolgersi come segue. Calato in stazione l'universale ed orientato convenientemente il cerchio azimutale per facilitare le puntate, si compiranno le osservazioni coniugate alla mira terrestre di cui occorra l'azimut, tenendo eventuale conto della inclinazione dell'asse mobile se la visuale fosse alquanto inclinata; si imporrà poi al cannocchiale, in una fissata posizione, la distanza zenitale prescelta diminuita del corrispondente importo della rifrazione normale e si bloccherà l'equipaggio di Talcott all'asse mobile, previo accordo reciproco della lunghezza e della posizione delle bolle delle eventuali due livelle. Poco prima del passaggio della stella programmata all'almucantarat convenuto, si dirigerà il cannocchiale secondo l'azimut approssimato precalcolato e si compirà una prima lettura azimutale; ritoccato poi, eventualmente, il centramento delle livelle di Talcott, mediante la vite dei piccoli movimenti zenitali, si leggerà ed invertirà sugli appoggi la livella dell'asse orizzontale; letto nuovamente il cerchio azimutale e compiute le letture alle livelle di Talcott, si passerà alla osservazione stellare puntando con il filo mobile d'altezza, e registrandone di seguito le letture micrometriche, la stella all'atto dei suoi passaggi successivi ad un preordinato numero di fili fissi azimutali, compreso il centrale. Dopo di che, si leggeranno una seconda volta le livelle di Talcott, la livella dell'asse orizzontale nella posizione invertita ed infine, una o due volte ancora, il cerchio azimutale.

La seconda coppia di puntate coniugate alla mira terrestre chiuderà il gruppo di osservazioni isoelevate e potrà, volendo, iniziarne una seconda nella posizione strumentale coniugata.

4. Oltre alla determinazione numerica mediante i minimi quadrati, il metodo è suscettibile di una soluzione grafica approssimata a mezzo delle « rette di declinazione », analoga a quella delle note « rette d'altezza » e delle « rette d'azimut (per una altezza costante) » (3).

Si considerino, infatti, per il momento teoricamente, delle coppie di stelle che alla zenitale z_0 abbiano:

a) angoli orari uguali e parallattici supplementari, quando sia $|\varphi_a| + z_0 \leq 90^o$; oppure:

b) angoli orari differenti di 180^o e parallattici opposti, quando invece sia $|\varphi_a| + z_0 \geq 90^o$.

(3) ANDRÉ GOUGENHEIM, *Une méthode nouvelle d'astronomie géodésique: la méthode des droites d'azimut*, « Bollettino di Geodesia e Scienze affini », I.G.M., Anno XI (1952), n. 2, p. 159.

Se con $\rho\,(\mathrm{H}\,,q)$ si indica sinteticamente il secondo membro della equazione generata, le osservazioni di coppie siffatte dànno luogo alla relazione:

$$\cos\mathrm{H}\cdot\Delta\varphi+\mathrm{sen}\cdot\mathrm{H}(-\cos\varphi\cdot\Delta\mathrm{M})=\frac{1}{2}\cdot\{\rho(\mathrm{H}\,,q)\pm\rho(\mathrm{H}+\eta\cdot 180^{\circ},[1-\eta]\cdot 180^{\circ}-q)\},$$

valendo le condizioni: segno $+$ ed $\eta = 0$ per $|\,\varphi\,| + z_0 \leq 90^{\circ}$; segno $-$ ed $\eta = 1$ per $|\,\varphi\,| + z_0 \geq 90^{\circ}$.

Posto poi:

$$\begin{cases} x_{\mathrm{P}} = \rho_{\mathrm{P}}\cdot\cos\mathrm{H}_{\mathrm{P}} = \Delta\varphi \\ y_{\mathrm{P}} = \rho_{\mathrm{P}}\cdot\mathrm{sen}\;\mathrm{H}_{\mathrm{P}} = -\Delta\mathrm{M}\cdot\cos\varphi_a \end{cases}$$

la precedente equazione, indicandone brevemente con $\rho\,(\mathrm{H})$ il secondo membro, riducesi alla forma:

$$\rho_{\mathrm{P}}\cdot\cos\,(\mathrm{H}-\mathrm{H}_{\mathrm{P}}) = \rho\,(\mathrm{H})$$

di immediata interpretazione geometrica. In un sistema infatti di coordinate piane infinitesime rettilinee $(x\,,y)$ e polari $(\rho\,,\mathrm{H})$, associate, con origine e polo nel polo boreale approssimato P_{ba} corrispondente ai valori iniziali $\varphi_a\,,\mathrm{M}_a$, con semiasse positivo x secondo il semicerchio orario diretto allo zenit della stazione e semiasse y a$+6^{\mathrm{h}}$ dal precedente, il luogo dei punti $\mathrm{P}\,[\rho\,(\mathrm{H})\,,\mathrm{H}_a]$ è una circonferenza di diametro ρ_{P} passante per l'origine P_{ba} e per il polo boreale $\mathrm{P}_b\,(\rho_{\mathrm{P}}\,,\mathrm{H}_{\mathrm{P}})$. Tale polo resta quindi individuato teoricamente come secondo estremo del diametro, uscente dal polo approssimato, di una tale circonferenza; questa, nella realtà, è effettivamente una intera circonferenza o riducesi ad un suo arco di determinata ampiezza secondo che $|\,\varphi_a\,| + z_0$ sia rispettivamente maggiore o minore di 90°.

Disponendo perciò dei termini medi $\rho\,(\mathrm{H})$, omogenei con le declinazioni, relativi a coppie osservate di stelle nelle predette condizioni reciproche, le normali n_{H} nei punti $\mathrm{P}\,[\rho\,(\mathrm{H}),\,\mathrm{H}_a]$ alle rette orarie orientate r_{H} d'anomalia H_a, sulle quali ultime si riporti la distanza orientata $\rho\,(\mathrm{H})$, concorrono tutte nel polo vero P_b. Le rette n_{H} sono appunto le *rette medie di declinazione*.

La circonferenza in parola od il suo arco, da tracciarsi approssimativamente punto per punto, saranno quindi praticamente tanto meglio individuati quanto più numerose e più uniformemente distribuite su tutto l'almucantarat sono le coppie stellari osservate rispondenti il meglio possibile alle citate condizioni.

Dal lato pratico, però, è piuttosto difficile che si possa disporre anche di poche coppie siffatte se per necessità di cose si restringono le osservazioni del gruppo entro un intervallo di un paio d'ore.

Le grandezze in genere disponibili, provenienti dalle osservazioni, sono le quantità note $\rho\,(\mathrm{H}\,,q) = \rho_{\mathrm{H}_q}$, cioè il termine noto dell'equazione generata. Se quindi sul piano, intorno al polo approssimato P_{ba}, si dispongono i punti $\mathrm{P}_{\mathrm{H}_q}$ di coordinate polari corrispondentisi $(\rho_{\mathrm{H}_q}\,,\mathrm{H}_a)$, come curva luogo dei $\mathrm{P}_{\mathrm{H}_q}$ si avrà una *pseudo-lumaca di Pascal* o *concoide generalizzata del circolo* avente appunto come curva base il circolo delle proiezioni ortogonali del polo P_b sulle varie rette orarie r_H e per polo il polo boreale approssimato origine P_{ba}.

I punti P_{H_q} reali della pseudo–lumaca costituiscono l'intera curva, quando $|\varphi_a| + z_0 \geq 90^o$ (riducentesi eventualmente ad una circonferenza per $\Delta\zeta = 0$ o per $|\varphi_a| + z_0 = 90^o$), o configurano semplicemente una lunula con cuspidi terminali sulle rette orarie di massima elongazione oraria, quando invece $|\varphi_a| + z_0 < 90^o$.

Di più, una tale pseudo–lumaca riesce *podaria*, rispetto al polo approssimato P_{ba}, di una conica (ellisse, se $|\varphi_a| + z_0 > 90^o$; iperbole, se $|\varphi_a| + + z_0 < 90^o$) a centro coincidente appunto con P_b ed un cui asse giace sulla semiretta oraria r_{H_p} di P_b. Gli asintoti della iperbole, quando $|\varphi_a| + z_0 < 90^o$, sono le rette medie di declinazione relative alle massime elongazioni orarie. Il polo P_b, pertanto, resta pure individuato quale centro (proprio) della conica inviluppo delle rette di declinazione condotte per i punti P_{H_q}.

Da ultimo, merita di non essere dimenticata una seconda e più semplice interpretazione geometrica e conseguente soluzione grafico–numerica. Se in ascisse si riportano i valori angolari orari H ed in ordinate le corrispondenti coppie dei termini noti ρ_{H_q}, $\rho_{H,180^o - q}$ oppure ρ_{H_q}, $\rho_{H+180^o, -q}$ associati tra di loro in base alle succitate condizioni tra angoli parallattici ed orari, gli estremi di tali ordinate delimitano delle strette (se $\Delta\zeta$ riesce piccola) zone di piano a configurazione sinusoidale e di larghezza variabile sinusoidalmente secondo la relazione $2 \cdot |\Delta\zeta \cdot \sqrt{1 - (\cos \varphi_a / \mathrm{sen}\, z_0)^2 \, \mathrm{sen}^2 \, H_a}|$.

Le coordinate del punto medio di massima ordinata (eventualmente estrapolato, se cadesse al di là delle massime elongazioni orarie), sono le coordinate polari (ρ_P, H_P) del polo vero boreale P_b, dalle quali trarre le variazioni principali $\Delta\varphi$ e ΔM di latitudine e lettura meridiana.