Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Salvatore Cherubino

# Il concetto di epoca nell'economia matematica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **37** (1964), n.5, p. 267–271.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_5_267_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

**Economia matematica.** — *Il concetto di epoca nell'economia matematica* [*]. Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata [**] dal Socio B. SEGRE.

1. L'economia politica diventa econometria quando si affrontano questioni che involgono concetti statistici e matematici che sono propri della misura delle grandezze economiche. Ponendosi su questa strada essa ha bisogno di leggi economiche accurate e dati statistici sufficienti [1].

Nel simposio tenuto alla *Royal statistical Society*, nel 1960, J. Robinson espresse l'opinione che il massimo inconveniente dell'econometrica è quello di appoggiarsi sul concetto di equilibrio generale che appare una condizione limite del tutto irreale [2]. A questo difetto è stato ovviato trasformando le equazioni caratteristiche in disuguaglianza. Molte altre cause di deficienza sono state lamentate da vari studiosi.

La scarsa accuratezza notata da Haavelmo dipende talvolta dal linguaggio comune che non permette di esporre concetti e definizioni con la necessaria chiarezza. Gli schemi di lungo e corto periodo vengono, secondo Marchal [3], dati in modo confuso e contraddittorio perseguendo l'uno, quello di lungo periodo, le fluttazioni che non può avere l'altro. Si potrebbe dire, col di Fenizio, che tale distinzione si può giustificare solo se può tornare utile [4]. Il che è un mezzo elegante per evitare la definizione. La distinzione dei fenomeni secondo che si svolgono in periodi di tempo brevi, medi e lunghi abbisogna, per essere soddisfacente, di una base concettuale che abbracci il fenomeno dal suo sorgere per poi declinare sino ad estinguersi o sino alla ripresa.

Una tale base può darsi a mezzo del concetto di *intervallo di regolarità e di pausa*.

Il primo è un periodo di tempo in cui tutte le grandezze economiche considerate come flussi presentano continuità e derivabilità. Pausa è un intervallo di tempo in cui almeno uno di questi flussi non ha continuità o manca di derivata. L'insieme degli intervalli di regolarità e delle pause di un sistema economico durante il quale il sistema non cambia totalmente di

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1964.

(1) TRIGVE HAAVELMO, *The role of the economirvam in the alvamement of Economic theorie*, « Econometrica », n. 26, pp.352–357.

(2) M. ARCELLI, *Crisi dell'econometrica o errata impostazione metodologica?*, «L'Industria», n. 1 del 1961, pp.33–44, p. 37.

(3) M. MARCHAL, *Méthode scientifique et science économique*, Paris, Génin, 1955, pp. 266–273.

(4) DI FENIZIO, *Le leggi dell'economia. Diagnosi, precisioni politiche congiunturali in Italia*, « L'industria », 1959, pp. 13–15.

struttura si dice *epoca*: fra due intervalli di regolarità c'è una pausa ad essi adiacente. *Epoca* è un intervallo di tempo in cui gli spasmi delle pause non provocano cambiamenti notevoli nella struttura del sistema, cioè la matrice dei coefficienti tecnici resta pressoché invariata nel passare da un intervallo di regolarità a un altro successivo, in particolare restano all'incirca costanti le molteplicità delle radici caratteristiche della matrice di detti coefficienti e quasi inalterati i coefficienti tecnici, quindi la riducibilità della matrice rimane sostanzialmente la stessa sia pel numero delle sottoeconomie che nelle loro caratteristiche essenziali. Il passaggio attraverso le pause non provoca mutamenti sensibili nell'aspetto della matrice dei coefficienti tecnici. Questa viene più o meno sconvolta, mentre dura ciascuna pausa, ma non subisce, in definitiva, mutamenti considerevoli nel passare dall'uno all'altro intervallo di regolarità della stessa epoca. Cambiamenti di epoca possono esser provocati da pause particolarmente intense che dànno luogo a mutamenti permanenti o cospicui nella matrice dei coefficienti tecnici, cioè nelle caratteristiche del sistema economico relativo.

2. Fenomeni di *breve*, *medio* e *lungo termine* sono caratterizzati non solo dalla loro durata, ma anche dall'intensità del periodo di pausa che comprendono, cioè sono classificati secondo il prodotto della durata per l'intensità della pausa. Il fenomeno occupa un certo numero $\mu$ di intervalli di regolarità e certe $m$ pause. Siano $L_s$, $s = 1, 2, \cdots, \mu$, le lunghezze degli intervalli di regolarità, $l_r$, $r = 1, 2, \cdots, m$, le lunghezze delle $m$ pause, $i_r$, $r = 1, 2, \cdots, m$, le loro intensità. La lunghezza del fenomeno è:

$$\sum_{s=1}^{\mu} L_s + \sum_{r=1}^{n} l_r ,$$

mentre la intensità di pause dello stesso fenomeno è:

$$\nu(t) = \sum_{r=1}^{m} l_r \, i_r(t) ,$$

dove abbiamo preso eguale a zero l'intensità di ogni intervallo di regolarità. Il numero $\nu(t)$ si dice *intensità complessiva* del fenomeno. Essa vale $\nu(t)$, che può essere di *piccola*, di *media grandezza* o *grande*. Questa piccolezza o grandezza viene giudicata con un criterio che dipende dal tempo in cui si presenta.

Se $m = 0$, $\nu(t)$ è certamente minimo (zero) ed il fenomeno si dice di breve termine e di intensità di pause minima (= zero).

Se $m = 1$, il fenomeno avrà una certa durata maggiore di quella in cui $m = 0$, ed una intensità di pause maggiore di zero, quindi non può dirsi senz'altro di breve termine. Sarà di breve, media o grande intensità secondo che $\nu(t)$ risulti piccolo, medio o grande, il che dipenderà dal tempo in cui avviene il fenomeno. Se la sua durata è piccola, generalmente anche $\nu(t)$ è piccolo; se la durata è grande o media, generalmente anche $\nu(t)$ è grande o media. Ma non accade sempre così, né avviene sempre il viceversa.

Quando i periodi in cui accade il fenomeno siano ciascuno adiacente al successivo e cominciano tutti nello stesso istante, si ha che la intensità di pause aumenta con la durata, e viceversa. In tal caso il numero delle pause aumenta o diminuisce insieme alla loro intensità complessiva $\nu(t)$: ciò accade anche quando si abbiano più settori del sistema economico interessati dal fenomeno contemporaneamente. Altrimenti nulla si può dire, cioè non si può affermare che il fenomeno sia più intenso o meno intenso nelle sue pause secondo il numero di esse.

Concludiamo che:

*se si ha a che fare con fenomeni che hanno inizio tutti nello stesso istante e che avvengano in intervalli di tempo ciascuno adiacente al successivo, anche se il fenomeno interessa piu settori contemporaneamente, i periodi di breve, medio e lungo termine sono anche fenomeni di breve, media e lunga intensità di pause.* Quindi: *sono a periodo di breve termine quelli operanti in un solo intervallo di regolarità o in due o più separati da pause corte e poco intense; sono fenomeni a medio o lungo termine quelli operanti in un certo numero limitato o grande di intervalli di regolarità, separati da pause non lunghe e poco intense, ovvero da pause comunque lunghe e di qualsiasi intensità.*

3. Nel caso generale di periodi di tempo aventi origine differenti e di settori contemporanei, sia $t_1$ il tempo in cui si verificano le pause del fenomeno, $\nu(t)$ la intensità complessiva e si ponga:

$$\tau = \frac{\nu(t)}{t_1},$$

Questo rapporto si dirà *intensità relativa* delle pause del fenomeno. Se si tratta di più settori, che sono contemporaneamente investiti dal fenomeno, le pause comuni conservano la stessa intensità di un'unica pausa, cioè le pause comuni si contano per una sola di lunghezza massima; sicchè $\tau$ rimane inalterato insieme alla intensità complessiva, $\nu(t)$. Se occorre eliminare un settore o una pausa o ridurne l'intensità si supporrà che ciò sia fatto e calcolato $\nu(t)$ e $t_1$ dopo aver fatta l'eliminazione o riduzione.

Se, qualunque sia la durata dell'epoca in cui si verifica il fenomeno, $\nu(t)$, ovvero $t_1$ o entrambi superassero i limiti giudicati sopportabili dall'economia del sistema, il fenomeno entrerà in un'altra epoca dello stesso sistema e si dirà che questo è in *crisi*. I criteri coi quali si fissano i valori sopportabili di $\nu(t)$ e di $\tau$ sono variabili col tempo e possono fissarsi con una certa arbitrarietà, anch'essa variabile col tempo. L'epoca si dice di *prima specie* se per essa è costante il valore che si giudica sopportabile per $\nu(t)$; si dice di *seconda specie* se è costante il valore che si giudica sopportabile per $\tau$, *intensità relativa*. Se tali valori sono entrambi costanti l'epoca si dice di *terza specie* o *normale*.

Anche la *durata di un'epoca* è variabile secondo il tempo o l'arbitrio di chi la fissa. Il rapporto $\tau$ conviene fissarlo eguale ad uno; il limite di tempo

$t_1$, conviene sceglierlo eguale alla durata dell'epoca. Restano così fissati, in base all'epoca (che resterà in certa misura arbitraria) i valori sopportabili di $\nu(t)$ e di $\tau$, che assegnano la specie dell'epoca.

4. Supponiamo di avere a che fare col caso normale, con $\tau = 0$. Poiché $t_1$ è finito, sarà necessariamente $\nu(t) = 0$; essendo le pause tutte distinte e di intensità finita diversa da zero, saranno eguali a zero le loro lunghezze. Cioè le pause sono dei punti. Allora l'intervallo di regolarità é uno pseudo–intervallo [5] e sarà tale ogni suo *componente*.

Consideriamo le trasformazioni evolutive del sistema economico. Esse sono soluzioni di un sistema di equazioni differenziali, lineare ordinario di primo ordine, con la matrice dei coefficienti funzione del tempo. Questa matrice supponiamola integrabile secondo Lebesgue in uno pseudo–intervallo di regolarità nel quale si mantiene finita. [6] Si tratterà di trasformazioni assolutamente continue [7] nello stesso intervallo [8], perciò a variazione limitata [9], con derivata finita in *quasi tutto* l'intervallo predetto [10].

Lo stesso accade per la trasformazione evolutiva dei vettori surproduzioni–survalori che è omogenea e di quella non omogenea trasformata dalla precedente, con la matrice delle disuguaglianze caratteristiche, che portano il vettore surproduzioni–survalori nei corrispondenti consumi massimi possibili e nei costi unitari di forza–lavoro [11] al tempo $t$.

Altrettanto può ripetersi per le trasformazioni evolutive operanti su ogni altra coppia di vettori associati finiti ed ammettenti derivate finite in quasi tutto l'intervallo o pseudo–intervallo in cui il sistema si integra. Queste coppie di vettori associati operano tutte nello stesso pseudo–intervallo di tempo descrivendo gruppi fra loro isomorfi [12] di trasformazioni evolutive. Le trasformazioni operanti sulla stessa coppia e nello stesso pseudo–intervallo descrivono gruppi commutativi [13]. L'isomorfismo e la commutatività è rigorosa, perché si opera sempre sullo stesso pseudo–intervallo di regolarità: è questo il vantaggio che possiede il caso normale con $\tau = 0$. Si comprende così come nel caso generale questa commutatività e questo isomorfismo che sussistono nei singoli intervalli di regolarità diventino quasi commutatività e quasi isomorfismo [14].

(5) Per la nozione di pseudo–intervallo vedesi L. TONELLI, *Calcolo delle variazioni*, vol. I, Bologna, Zanichelli, n. 40, pp. 122–124.

(6) S. CHERUBINO, *Gruppi evolutivi di un sistema economico*, « Rend. Matem. di Roma » (1–2), vol. 22, cap. III, pp. 295–316; § 2, pp. 312–313.

(7) L. TONELLI, loco cit. (5), cap. V, n. 57; p. 965.

(8) Ibidem, cap. I, n. 16 *a*), p. 62.

(9) Ibidem, cap. I, n. 16 *c*), n. 58, p. 166.

(10) Ibidem, cap. III, n. 45 *d*), pp. 139–140.

(11) *Gruppi evolutivi* cit., p. 303 (2.11).

(12) Ibidem, paragr. 2.4, pp. 307–309.

(13) Ibidem, paragr. 2.5, p. 309 e 2.6, pp. 311–312.

(14) Ibidem, paragr. 2.5, pp. 309–311.

5. Fin qui ci siamo occupati delle trasformazioni evolutive che operano mediante un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie di primo ordine ottenuto esprimendo il $2n$ vettore produzioni–prezzi col $2n$–vettore derivato dei prezzi–produzioni. Questo sistema si condiziona mediante le disuguaglianze caratteristiche che legano le produzioni–prezzi ai consumi–forza di lavoro, trasformandosi in un sistema fra le surproduzioni–survalori o queste alle produzioni–prezzi: il primo è un sistema omogeneo, il secondo è non omogeneo. Così per le altre coppie di vettori associati.

Il Leontief [15], invece, chiama dinamico il sistema che lega soltanto il vettore delle produzioni al suo derivato. Questo è ottenuto nell'ambito dei soli coefficienti tecnici, mentre il precedente è ottenuto in quello delle reazioni di mercato e dei coefficienti tecnici, adoperando le disuguaglianze caratteristiche. Il sistema di Leontief presuppone l'equilibrio generale, mentre il nostro ne fa a meno. Pel secondo (di Leontief) come pel primo, si può far l'ipotesi che i coefficienti del sistema siano integrabili su uno pseudo–intervallo di regolarità, e si ottiene la commutatività del gruppo di trasformazioni.

(15) *Studies in the structure of the American Economy* (Oxford University, 1953), parte I, 3. pp. 53–90, paragr. II, pp. 55–58.