
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIOVANNI PROUSE

Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea della membrana vibrante, con termine dissipativo quadratico. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.5, p. 246–252.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_5_246_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione non omogenea della membrana vibrante, con termine dissipativo quadratico* (*). Nota I di GIOVANNI PROUSE, presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

Sia Ω un aperto limitato e connesso del piano $x \equiv (x_1, x_2)$, dotato della proprietà di cono e sia Γ la sua frontiera.

Consideriamo l'equazione

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \Delta u + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right| \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(x, \eta) \quad (x \in \Omega, \eta \in J \equiv (-\infty, \infty))$$

corrispondente al moto di una membrana soggetta ad una forza esterna $f(x, \eta)$ e ad una resistenza passiva, di tipo viscoso per piccoli valori della velocità, di tipo idraulico per grandi valori. Ammetteremo che il bordo della membrana sia fisso: di conseguenza, le soluzioni soddisferanno alla condizione al contorno

$$(1.2) \quad u|_{\Gamma \times J} = 0.$$

Posto

$$u(\eta) = \{u(x, \eta); x \in \Omega\}, \quad u'(\eta) = \left\{ \frac{\partial u(x, \eta)}{\partial \eta}; x \in \Omega \right\},$$

$$u''(\eta) = \left\{ \frac{\partial^2 u(x, \eta)}{\partial \eta^2}; x \in \Omega \right\}, \quad \Delta u(\eta) = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}; x \in \Omega \right\},$$

$$f(\eta) = \{f(x, \eta); x \in \Omega\}, \quad |a(\eta)|b(\eta) = \{|a(x, \eta)|b(x, \eta); x \in \Omega\},$$

scriveremo la (1.1) in forma operativa:

$$(1.3) \quad u''(\eta) - \Delta u(\eta) + u'(\eta) + |u'(\eta)|u'(\eta) = f(\eta).$$

Seguendo la definizione data da Lions e Strauss [1] (***), diremo che $u(\eta)$ è una soluzione (in senso debole) in $J_0 \equiv [0, \infty)$ della (1.3) corrispondente al problema di frontiera (1.2) ed alle condizioni iniziali

$$(1.4) \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato della Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1963-64. Durante lo svolgimento di questo lavoro, l'autore ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1964.

(***) Per la bibliografia ved. Nota II.

qualora siano verificate le condizioni:

- $a_1) u(\eta) \in L_{loc}^\infty(J_0; H_0^1), u'(\eta) \in L_{loc}^\infty(J_0; H_0^1), u''(\eta) \in L_{loc}^\infty(J_0; L^2) \text{ (1)};$
 $b_1) u(\eta)$ soddisfa all'equazione

$$(1.5) \quad \int_{J_0} \{ (u''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (u'(\eta), h(\eta))_{L^2} + \\ + (|u'(\eta)| u'(\eta), h(\eta))_{L^2} \} d\eta = \int_{J_0} (f(\eta), h(\eta))_{L^2} d\eta$$

per ogni $h(\eta) \in L_{loc}^2(J_0; H_0^1)$, a supporto compatto;

$c_1)$ Siano soddisfatte le (1.4) (le quali hanno senso in quanto, per la condizione $a_1)$, $u(\eta)$ e $u'(\eta)$ sono continue come funzioni a valori rispettivamente in H_0^1 ed L^2).

Analogamente (cfr. [2], [3]), diremo che $u(\eta)$ è una soluzione (debole) della (1.3) in J se:

- $a_2) u(\eta) \in L_{loc}^\infty(J; H_0^1), u'(\eta) \in L_{loc}^\infty(J; H_0^1), u''(\eta) \in L_{loc}^\infty(J; L^2);$
 $b_2) u(\eta)$ soddisfa all'equazione

$$(1.6) \quad \int_J \{ (u''(\eta), h(\eta))_{L^2} + (u(\eta), h(\eta))_{H_0^1} + (u'(\eta), h(\eta))_{L^2} + \\ + (|u'(\eta)| u'(\eta), h(\eta))_{L^2} \} d\eta = \int_J (f(\eta), h(\eta))_{L^2} d\eta$$

per ogni $h(\eta) \in L_{loc}^2(J; H_0^1)$, a supporto compatto.

Notiamo che le derivate vanno sempre intese nel senso della teoria delle distribuzioni. Le funzioni considerate si supporranno reali.

Introduciamo le seguenti notazioni.

$$E = H_0^1 \times L^2; \quad \text{posto } \bar{u}(\eta) = \{u(\eta), u'(\eta)\},$$

sarà

$$(1.7) \quad \|\bar{u}(\eta)\|_E^2 = \|u(\eta)\|_{H_0^1}^2 + \|u'(\eta)\|_{L^2}^2.$$

Nel seguito indicheremo, per semplicità, con $u(\eta)$ la funzione $\bar{u}(\eta)$, precisando lo spazio in cui tale funzione va considerata; si scriverà perciò $\|u(\eta)\|_E$ in luogo di $\|\bar{u}(\eta)\|_E$.

Posto $\Delta_0 = [0, 1]$, indicheremo con L_0^p lo spazio $L^p(\Delta_0; L^p)$. Sia poi $u(\eta)$ una funzione $\in L_0^2$; a $u(t + \eta)$, $\eta \in \Delta_0$, possiamo far corrispondere in

(1) Con $L_{loc}^p(J_0; H_0^1)$ viene indicato lo spazio delle funzioni a valori in H_0^1 , di potenza p -esima sommabile su ogni compatto $\subset J_0$; H_0^1 è lo spazio delle funzioni di x_1, x_2 a quadrato sommabile in Ω insieme alle loro derivate (intese nel senso delle distribuzioni) ed uguali a zero (in senso generalizzato) su Γ .

J una funzione a valori in L_0^2 , che diremo ancora $u(t)$, ponendo $u(t) = \{u(t + \eta); \eta \in \Delta_0\}$, ed inoltre

$$(1.8) \quad \|u(t)\|_{L_0^2} = \left\{ \int_{\Delta_0} \|u(t + \eta)\|_{L^2}^2 d\eta \right\}^{1/2}.$$

Detto infine K un generico spazio di Banach, indicheremo lo spazio $L^p(\Delta_0; K)$ con $L_0^p(K)$.

È stato dimostrato in [1] che *esiste in J_0 una ed una sola soluzione $u(\eta)$ della (1.3) soddisfacente alle (1.4) qualora $f(\eta) \in L_{loc}^2(J_0; L^2)$, $f'(\eta) \in L_{loc}^2(J_0; L^2)$* . Tale soluzione si ottiene con il metodo di Faedo-Galerkin nel modo seguente.

Indicata con $\{g_j\}$ una successione di elementi $\in H_0^1$, linearmente indipendenti e densi in H_0^1 e detta $u_n(\eta) = \sum_{k=1}^n \alpha_{kn}(\eta) g_k$ la soluzione del sistema

$$(1.9) \quad (u_n''(\eta), g_j)_{L^2} + (u_n(\eta), g_j)_{H_0^1} + (u_n'(\eta), g_j)_{L^2} + \\ + (|u_n'(\eta)| u_n'(\eta), g_j)_{L^2} = (f(\eta), g_j)_{L^2} \quad (j = 1, \dots, n),$$

soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(1.10) \quad u_n(0) = 0, \quad u_n'(0) = 0,$$

si può estrarre da $\{u_n(\eta)\}$ una sottosuccessione (che diremo ancora $\{u_n(\eta)\}$) in modo che risulti, per ogni $h_1 \in L_0^1(E)$

$$(1.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_0} (u_n(t + \eta) - u(t + \eta), h_1(\eta))_E d\eta = 0,$$

$$(1.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta_0} (u_n'(t + \eta) - u'(t + \eta), h_1(\eta))_E d\eta = 0.$$

Inoltre, se

$$(1.13) \quad \sup_{t \in J_0} \|f(t)\|_{L_0^2} = M_0 < \infty,$$

allora [3] si ha, per $\eta \in J_0$,

$$(1.14) \quad \|u(\eta)\|_E \leq K$$

(essendo K una quantità dipendente solo da f e da Ω) ed inoltre, per ogni n ,

$$(1.15) \quad \|u_n(\eta)\|_E \leq K.$$

Le (1.11), (1.12) e (1.14) seguono appunto dalla (1.15) interpretando lo spazio $L^\infty(\Delta_0; E)$ come il duale di $L_0^1(E)$ e tenendo presente che nella topologia debole* la sfera unitaria è compatta [4].

Nel presente lavoro *dimostreremo, ai §§ 2 e 3, l'esistenza e l'unicità di una soluzione $\bar{u}(\eta)$ E-limitata in J della (1.3) qualora $f(t)$ e $f'(t)$ siano L_0^2 -limitate in J ; dimostreremo, in più, che anche la derivata $\bar{u}'(\eta)$ risulta*

E-limitata in J . Nel § 4 faremo poi vedere che la traiettoria di $\bar{u}(\eta)$ è E-relativamente compatta e proveremo, infine, che se $f(t)$ è L_0^2 -debolmente quasi-periodica, $\bar{u}(\eta)$ risulta E-quasi-periodica.

Se quindi $f(\eta)$ è periodica di periodo T , anche $\bar{u}(\eta)$ è periodica con periodo T : si riottiene così un precedente risultato [2].

2. Dimostriamo anzitutto il seguente teorema.

TEOREMA 2.1. — Supponiamo che il termine noto soddisfi, oltre alla (1.13), anche alla relazione

$$(2.1) \quad \sup_{t \in J_0} \|f'(t)\|_{L_0^2} = M_1 < \infty.$$

Allora, detta $\tilde{K}$ una quantità dipendente solo da M_0, M_1, Ω , risulta, per $\eta \in J_0$,

$$(2.2) \quad \|u'(\eta)\|_E \leq \tilde{K}.$$

Perché il teorema sia dimostrato, basterà, in virtù della (1.12), far vedere che è, per $\eta \in J_0$

$$(2.3) \quad \|u_n'(\eta)\|_E \leq \tilde{K}.$$

Osserviamo anzitutto che, per le ipotesi fatte, possiamo derivare le (1.9), ottenendo

$$(2.4) \quad (u_n'''(\eta), g_j)_{L^2} + (u_n'(\eta), g_j)_{H_0^1} + (u_n''(\eta), g_j)_{L^2} + 2(|u_n'(\eta)| u_n''(\eta), g_j)_{L^2} = \\ = (f'(\eta), g_j)_{L^2} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Moltiplichiamo le (2.4) per $\alpha_{jn}'(\eta)$ e sommiamo; si ottiene

$$(2.5) \quad (u_n'''(\eta), u_n'(\eta))_{L^2} + (u_n'(\eta), u_n''(\eta))_{H_0^1} + \|u_n''(\eta)\|_{L^2}^2 + \\ + 2(|u_n'(\eta)| u_n''(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} = (f'(\eta), u_n''(\eta))_{L^2}$$

ossia anche, integrando tra due generici valori di $\eta \in J_0$, η_1 ed η_2 :

$$(2.6) \quad \frac{1}{2} \|u_n''(\eta_2)\|_E^2 - \frac{1}{2} \|u_n''(\eta_1)\|_E^2 = \\ = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \{ - \|u_n''(\eta)\|_{L^2}^2 - 2(|u_n'(\eta)| u_n''(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} + (f'(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} \} d\eta.$$

Moltiplicando poi le (2.4) per $\alpha_{jn}'(\eta)$, sommando ed integrando fra η_1 ed η_2 , risulta analogamente,

$$(2.7) \quad (u_n''(\eta_2), u_n'(\eta_2))_{L^2} - (u_n''(\eta_1), u_n'(\eta_1))_{L^2} + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \{ - \|u_n''(\eta)\|_{L^2}^2 + \|u_n'(\eta)\|_{H_0^1}^2 + \\ + (u_n''(\eta), u_n'(\eta))_{L^2} + 2(|u_n'(\eta)| u_n''(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} - (f'(\eta), u_n''(\eta))_{L^2} \} d\eta = 0.$$

Si ha poi [1]:

$$(2.8) \quad \|u_n''(0)\|_{L_0^2}^2 + 2(|u_n'(0)|u_n''(0), u_n''(0))_{L_0^2} \leq K_1^2 \quad (2).$$

Consideriamo un generico punto $\bar{\eta} \in J_0$ e dimostriamo anzitutto che risulta

$$(2.9) \quad \|u_n'(\bar{\eta} + 1)\|_{L^2}^2 \leq \max(\|u_n'(\bar{\eta})\|_{L^2}^2, \tilde{K}^2),$$

essendo $\tilde{K}$ una costante indipendente da $\bar{\eta}$.

Supponiamo, in un primo tempo, che risulti

$$(2.10) \quad \|u_n''(\bar{\eta})\|_{L_0^2}^2 + 2(|u_n'(\bar{\eta})|u_n''(\bar{\eta}), u_n''(\bar{\eta}))_{L_0^2} \leq \max(K_1^2, M_1^2) = K_2^2.$$

Esistono allora due punti $\eta_n' \in [\bar{\eta}, \bar{\eta} + \frac{1}{4}]$, $\eta_n'' \in [\bar{\eta} + \frac{3}{4}, \bar{\eta} + 1]$ nei quali è

$$(2.11) \quad \|u_n''(\eta_n')\|_{L^2}^2 \leq 4K_2^2, \quad \|u_n''(\eta_n'')\|_{L^2}^2 \leq 4K_2^2.$$

Applichiamo la (2.7) all'intervallo $[\eta_n', \eta_n'']$; si ha, tenendo presente le (1.15), (2.1), (2.10), (2.11) e la disuguaglianza di Hölder:

$$(2.12) \quad \int_{\eta_n'}^{\eta_n''} \|u_n''(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta = -(u_n''(\eta_n''), u_n'(\eta_n''))_{L^2} + (u_n''(\eta_n'), u_n'(\eta_n'))_{L^2} + \\ + \int_{\eta_n'}^{\eta_n''} \{ \|u_n''(\eta)\|_{L^2}^2 - (u_n''(\eta), u_n'(\eta))_{L^2} - 2(|u_n'(\eta)|u_n''(\eta), u_n'(\eta))_{L^2} + \\ + (f'(\eta), u_n'(\eta))_{L^2} \} d\eta \leq 4KK_2 + K_2^2 + KK_2 + 2\|u_n''(\bar{\eta})\|_{L_0^2} \left\{ \int_{\eta_n'}^{\eta_n''} \|u_n'(\eta)\|_{L^4}^4 d\eta \right\}^{1/2} + \\ + M_2 K \leq 2K_2 \left\{ \int_{\eta_n'}^{\eta_n''} \|u_n'(\eta)\|_{L^4}^4 d\eta \right\}^{1/2} + K_3.$$

Osserviamo che, posto $Q_n = \Omega \times [\eta_n', \eta_n'']$, poiché Ω è un aperto bidimensionale dotato della proprietà di cono, l'immersione di $H^1(Q_n)$ in $L^4(Q_n)$ risulta, per un teorema di Kondrashov (cfr. ad esempio [5]), completamente continua; vale perciò, per ogni $\varepsilon > 0$, la seguente disuguaglianza di Lions [6]:

$$(2.13) \quad \|u_n'\|_{L^4(Q_n)}^2 \leq \varepsilon \|u_n'\|_{H^1(Q_n)}^2 + \sigma(\varepsilon) \|u_n'\|_{L^2(Q_n)}^2,$$

nella quale, essendo $\frac{1}{2} \leq \eta_n'' - \eta_n' \leq 1$, si può assumere $\sigma(\varepsilon)$ indipendente da n .

(2) Con K_j indicheremo sempre delle quantità dipendenti da $f(\eta)$ e da Ω , ma non da n .

Si ha quindi

$$(2.14) \quad \left\{ \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \|u'_n(\eta)\|_{L^4}^4 d\eta \right\}^{1/2} \leq \varepsilon \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} [\|u''_n(\eta)\|_{L^2}^2 + c \|u'_n(\eta)\|_{H_0^1}^2] d\eta + \\ + \sigma(\varepsilon) \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \|u'_n(\eta)\|_{L^2}^2 d\eta \leq \varepsilon K_2^2 + c\varepsilon \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \|u'_n(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta + \sigma(\varepsilon) K^2.$$

Introducendo la (2.14) nella (2.12) si ottiene

$$(2.15) \quad (1 - 2 K_2 c\varepsilon) \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \|u'_n(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \leq K_3 + 2 K_2 (\varepsilon K_2^2 + \sigma(\varepsilon) K^2)$$

e perciò, assumendo $\varepsilon \leq \frac{1}{4 K_2 c}$,

$$(2.16) \quad \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \|u'_n(\eta)\|_{H_0^1}^2 d\eta \leq K_4^2.$$

Tenendo presente la (2.10), si ottiene

$$(2.17) \quad \int_{\eta'_n}^{\eta''_n} \|u'_n(\eta)\|_E^2 d\eta \leq K_4^2 + K_2^2 = K_5^2.$$

Esiste quindi un punto $\eta_n^* \in [\eta'_n, \eta''_n]$ nel quale è

$$(2.18) \quad \|u'_n(\eta_n^*)\|_E^2 \leq 2 K_5^2 = K_6^2.$$

Dalla (2.6) si deduce poi, posto $\eta_1 = \eta^*$, $\eta_2 = \eta \in [\bar{\eta}, \bar{\eta} + 1]$ e ricordando le (2.1), (2.10):

$$(2.19) \quad \left| \|u'_n(\eta)\|_E^2 - \|u'_n(\eta^*)\|_E^2 \right| \leq 2 \left| \int_{\eta^*}^{\eta} \{ \|u''_n(\eta)\|_{L^2}^2 + 2 (|u'_n(\eta)| u''_n(\eta), u''_n(\eta))_{L^2} + \right. \\ \left. + \|f'(\eta)\|_{L^2} \|u''_n(\eta)\|_{L^2} \} d\eta \right| \leq 2 (K_2^2 + M_1 K_2),$$

e, di conseguenza, per la (2.18),

$$(2.20) \quad \|u'_n(\eta)\|_E^2 \leq K_6^2 + 2 (K_2^2 + M_1 K_2) = \tilde{K}^2 \quad (\eta \in [\bar{\eta}, \bar{\eta} + 1]),$$

ove $\tilde{K}$ è una quantità dipendente solo da f e da Ω .

In particolare, si ha

$$(2.21) \quad \|u'_n(\bar{\eta} + 1)\|_E^2 \leq \tilde{K}^2.$$

Supponiamo ora che non valga la (2.10), ossia che risulti

$$(2.22) \quad \|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}^2 + 2(|u'_n(\bar{\eta})|u''_n(\bar{\eta}), u''_n(\bar{\eta}))_{L_0} > K_2^2.$$

Se allora è

$$(2.23) \quad \|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}^2 > M_1^2,$$

dalla (2.6) si ottiene

$$(2.24) \quad \|u'_n(\bar{\eta} + 1)\|_E^2 - \|u'_n(\bar{\eta})\|_E^2 \leq 2(-\|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}^2 + \|f'(\bar{\eta})\|_{L_0} \|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}) < < 2\|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}(M_1 - M_1) = 0.$$

Se invece fosse

$$2.25) \quad \|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}^2 \leq M_1^2,$$

si avrebbe, per le (2.6), (2.22):

$$(2.26) \quad \|u'_n(\bar{\eta} + 1)\|_E^2 - \|u'_n(\bar{\eta})\|_E^2 \leq 2(-\|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}^2 - 2(|u'_n(\bar{\eta})|u''_n(\bar{\eta}), u''_n(\bar{\eta}))_{L_0} + \|f'(\bar{\eta})\|_{L_0} \|u''_n(\bar{\eta})\|_{L_0}) \leq 2(-K_2^2 + M_1^2) \leq 0.$$

Se è verificata la (2.22) risulta quindi, in ogni caso,

$$(2.27) \quad \|u'_n(\bar{\eta} + 1)\|_E^2 \leq \|u'_n(\bar{\eta})\|_E^2.$$

Dalle (2.21), (2.27) si deduce perciò la (2.9).

Consideriamo ora l'intervallo $[0, 1]$ e poniamo $\bar{\eta} = 0$. Osserviamo che, essendo, per le (2.8), (2.10),

$$(2.28) \quad \|u''_n(0)\|_{L_0}^2 + 2(|u'_n(0)|u''_n(0), u''_n(0))_{L_0} \leq K_2^2,$$

si ha, in virtù della (2.20), per ogni $\eta \in [0, 1]$,

$$(2.29) \quad \|u'_n(\eta)\|_E^2 \leq \tilde{K}^2.$$

Detto $\bar{\eta}_0$ un generico punto $\in [0, 1]$, introduciamo la successione $\{\bar{\eta}_j\}$, con $\bar{\eta}_j = \bar{\eta}_0 + j$ ($j = 0, 1, \dots$); si ha, per le (2.9) e (2.29),

$$(2.30) \quad \|u'_n(\bar{\eta}_{j+1})\|_E^2 \leq \max(\|u'_n(\bar{\eta}_j)\|_E^2, \tilde{K}^2) \leq \max(\|u'_n(\bar{\eta}_0)\|_E^2, \tilde{K}^2) = \tilde{K}^2.$$

Risulta dunque, per ogni $\eta \in J_0$,

$$(2.31) \quad \|u'_n(\eta)\|_E^2 \leq \tilde{K}^2$$

ed il teorema è dimostrato.