Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Liliana Mateescu, T. Kamytov

Sull'approssimazione delle soluzioni di alcuni sistemi integro-differenziali non lineari

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.5, p. 242–245.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_5_242_0>

Analisi matematica. — *Sull'approssimazione delle soluzioni di alcuni sistemi integro–differenziali non lineari.* Nota di LILIANA MATEESCU e T. KAMYTOV, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

In una serie di Note lincee dovute al prof. Mangeron e continuate poscia da questo autore in collaborazione col prof. L. E. Krivošein, relative ai problemi al contorno per varie classi di equazioni funzionali con operatori di M. Picone [1]–[4], sono stati esposti numerosi teoremi di esistenza, di unicità e di stabilità, che hanno suscitato interesse [5]–[6]. Il medesimo autore ha elaborato alcuni metodi di studio dei problemi al contorno e di calcolo effettivo delle soluzioni di vari sistemi differenziali alle derivate parziali, integro–differenziali e coll'argomento ritardato [7]–[8], che si includono in una teoria unitaria dei sistemi poliarmonici [9], policalorici [10] e polivibranti [11]. Tali metodi prendono le mosse dai problemi lineari utilizzando sistematicamente certe convoluzioni del tipo di Volterra [12], oppure usufruendo di una vasta mole di risultati recenti concernenti una nuova tecnica variazionale, dovuti a R. Bellman [13] e a M. Picone [14], allorché nel caso spettante ai problemi non lineari se ne fa uso, non appena si è conseguita la traduzione dei problemi considerati in equazioni integrali equivalenti, di varie formule di cubatura. Quest'ultimo metodo – detto il metodo di Mangeron oppure il metodo delle equazioni integrali – esposto da questo autore al recente Simposio internazionale promosso dall'IUTAM [15] ed alla III^a^ Conferenza internazionale di oscillazioni non lineari di Berlino [16], è stato applicato poscia dai vari autori alla determinazione approssimativa delle soluzioni ad alla valutazione degli errori commessi spettanti alla risoluzione di vari problemi di Fisica–Matematica, tradotti in sistemi integro–differenziali [17]–[21].

In ciò che segue gli Autori espongono alcuni risultati conseguiti nell'ordine d'idee degli studi di Mangeron e Krivošein testè mentovati spettanti ad alcuni problemi integro–differenziali non lineari.

2. – Si consideri l'equazione integro–differenziale non lineare della forma

$$(1) \qquad y^{(n)}(x) = f[x, y(x), \cdots, y^{k}(x)] + \int_0^1 \mathrm{K}(x, t)\, \mathrm{F}[t, y(t), \cdots, y^{(m)}(t)]\, dt$$

e le condizioni iniziali

$$(2) \qquad y^{(i)}(0) = y_0^{(i)}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1964.

Il problema considerato si riduce al problema equivalente

$$z(x) = \varphi(x) + \int_0^x N(x, t) f[t, z(t), \cdots, z^{(n-1)}(t)] \, dt + \tag{3}$$

$$+ \int_a^b M(x, t) F[t, z(t), \cdots, z^{(n-1)}(t)] \, dt.$$

Differenziando (3) successivamente $n-1$ volte, mettendovi poscia $x = x_p$, introducendo il parametro reale λ ed applicando agli integrali così ottenuti formole di quadratura, si ottiene il sistema di equazioni

$$w_j^{(r)} = \varphi^{(r)}(x_j) + \lambda \left\{ \sum_{\nu=0}^{i-1} D_\nu(x_j, x_\nu) f[x_\nu, w_\nu, \cdots, w_\nu^{(n-1)}] + \right. \tag{4}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} c_i M_x^{(i)}(x_j, x_i) F[x_i, w_i, \cdots, w_i^{(n-1)}] \right\},$$

$$r = 0, 1, \cdots, n-1 \; ; \; j = 1, 2, \cdots, k.$$

Derivando il sistema (4) rispetto al parametro λ, tenendo conto delle condizioni iniziali

$$w_j^{(r)}(0) = \varphi^{(r)}(x_j) \tag{5}$$

e supponendo che il sistema ottenuto sia risolubile rispetto alle derivate che vi figurano, si ricava un certo sistema di equazioni differenziali non lineari. La risoluzione di tale sistema mediante calcolo numerico sarà effettuata in [22]. La soluzione del problema considerato si presenta in modo semplice nel caso in cui

$$f[x, y(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)] \equiv f[x, y(x)] \, ; \, F[x, y(x), \cdots, y^{(n-1)}(x)] \equiv F[x, y(x)]. \tag{6}$$

3. Si consideri ora il problema al contorno

$$y''(x) = f[x, y(x), y'(x)] + \int_0^1 K(x, t) F[t, y(t), y'(t)] \, dt, \tag{7}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{8}$$

Il problema (7), (8) si riduce anzitutto ad un sistema integro-differenziale di forma

$$y^{(i)}(x) = \int_0^1 \{ G_x^{(i)}(x, s) f[s, y(s), y'(s)] + \Gamma_x^{(i)} F[s, y(s), y'(s)] \} \, ds. \tag{9}$$

Il metodo di risoluzione del sistema (9) consta, seguendo le indicazioni esposte in [15], nella sostituzione del secondo membro del sistema con una formula di quadratura ove si pone

$$x = x_p\,, \qquad p = 1\,,2\,,\cdots,k.$$

Si ottiene di conseguenza un sistema di equazioni algebriche rispetto alle incognite $\bar{y}^{(i)}(x_p)$:

$$\bar{y}^{(i)}(x_p) = \sum_{r=1}^{k} C_r \{ G_x^{(i)}(x_p\,,x_r) f[x_r\,,\bar{y}'(x_r)] + \tag{10}$$
$$+ \Gamma_x^{(i)}(x_p\,,x_r)\,F[x_r\,,\bar{y}(x_r)\,,\bar{y}'(x_r)]\}\,.$$

Il sistema (10) si risolve col metodo delle approssimazioni successive oppure col metodo di Newton.

Nel lavoro [22] sarà indicata la valutazione dell'errore commesso.

4. In una Nota di prossima pubblicazione sarà esposto lo studio del problema al contorno integro–differenziale non lineare additato nelle Note [23], [24]:

$$y^{(n)}(x) = f[x\,,y(x)\,,\cdots,y^{(k)}(x)] + \int_a^b K(x\,,t)\,F[t,y(t),\cdots,y^{(m)}(t)] + c(x), \tag{11}$$

$$R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [a_{ij}\,y^{(i)}(a) + b_{ij}\,y^{(i)}(b)] = 0, \qquad j = 1, 2,\cdots, n, \tag{12}$$

ove

$$f(x\,,u_0\,,\cdots,u_k),\ K(x\,,t),\ F(t\,,u_0\,,\cdots,u_m)\,,\ c(x) \tag{13}$$

sono funzioni note continue dei loro argomenti nel dominio D; $a_{ij}\,,b_{ij}$ sono coefficienti noti; $n > (k+1, m+1)$; $a\,,b =$ cost.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogenei di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro–differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXIV, 2, 118–122 (1963).

[2] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Valutazione degli errori commessi in alcuni metodi di calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali d'ordine superiore*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXIV, 2, 123–129 (1963).

[3] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXII, 3, 306–312 (1962).

[4] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*). « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXI, 1–2, 27–32 (1961).

[5] O. GÜREL, *Resoconti NN. 3302 e 3303*, «Mathematical Reviews», *28*, 4, 646–647 (1964).

[6] A. KORBUT, *Resoconto N. 8B337*, « Referativnyi Zurnal Matematika», *8*, 45 (1964).

[7] D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptique d'ordre supérieur* «C. R. Acad. Sci. Paris», *225*, 22, 2894–2896 (1962).

[8] D. MANGERON, *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière*, International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications. Stockholm, 1962, p. 95.

[9] M. PICONE, *Funzioni iperarmoniche*, « Bull. math. Soc. Roum. Sci.», *38* (1936).

[10] M. NICOLESCU, *Equation itérée de la chaleur*, «Studiii și cercetări mat.», Acc. R.P.R., *5* (3–4), 243–332 (1954).

[11] D. MANGERON, *Existence and unicity theorem concerned with Dirichlet's problem for a class of non-linear integro-differential equations with partial derivatives*, «Comunic. Acad. R.P.R.», XIII, 12, 1031–1034 (1963).

[12] D. MANGERON, *Sur les confluences de Volterra dans la théorie des solutions de différents types d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, Travaux du IV–e Congrès des Mathématiciens Roumains. Bucarest 1956.

[13] R. BELLMAN, S. DREYFUS, *Applied Dynamic Programming*, A RAND Corporation Research Study. Princeton University Press, 1962.

[14] M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*, «Atti della Accad. Naz. dei Lincei, Memorie, Roma», Anno CCCLX–1963, Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), VII, sez. I–a, 3, 33–57 (1963).

[15] D. MANGERON, *The Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics*, «Trudy meždunarodnogo Simpoziuma po nelineinym kolebaniam», IUTAM, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev 1963, 347–350.

[16] D. MANGERON, *Neue graphisch–analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Schwingungen*, III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, DAW, PAN, ČSAV, Berlin, 25–30. Mai 1964.

[17] F. ROSSI, *Sul metodo di Mangeron nello studio di alcuni problemi nonlineari*, « Bull. Inst. politehn. Iași», s.n., IX (XIII), 3–4, 39–42 (1963).

[18] STEFANIA RUSCIOR, *Sul metodo integrale nello studio di alcuni problemi integro–differenziali*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei, Roma» (8), Cl. Sci. fis., mat. e nat. XXXV, 6, (1963).

[19] L. MATEESCU, *Sur quelques problèmes nouveaux intégro–différentiels de Mangeron–Krivochéine*, « Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. de Belgique», (5), LXVIII, 9, 434–439 (1963).

[20] T. KAMYTOV, *Približennoe rešenie nekotoryh zadač dlia nelineinyh integro–differentzial 'nyh uravnenii*, «Doklady III–e Sibirskoi Konferenzii po matematike i mehanike», Izd. Tomskogo Un–ta, 113–115 (1964).

[21] F. MAZZELLA, *Su alcuni problemi di Mangeron–Krivošein concernenti una classe di equazioni integro–differenziali*, « Bul. Inst. politehn. Iași», s.n., IX (XIII), 3–4 (1963).

[22] T. KAMYTOV, *Primenenie metoda Mangeron–a v rešenii nekotoryh nelineinyh integro–differentzial'nyh zadač*, «Bul. Inst. politehn, Iași», s.n., X (XIV), 3–4 (1964).

[23] T. KAMYTOV, *K teorii kraevyh zadač dlia nelineinyh integro–differentzial'nyh uravnenii*, «Doklady Sibirskoi Konferenzii po matematike i mehanike», Izd. Tomskogo Un–ta 1964, 115–117.

[24] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Resenie zadači Goursat dlia odno ogklassa integro–differenzial'nyh uravnenii*, «Doklady III–i Sibirskoi Konferenzii po matematike i mehanike», Izd. Tomskogo Un–ta, 1964, 133–135.