
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

LIVIO GRATTON

Configurazioni di equilibrio di corpi fortemente implosi. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.5, p. 222–230.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_5_222_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Astronomia. — *Configurazioni di equilibrio di corpi fortemente implosi.* Nota I (*) del Corrisp. LIVIO GRATTON.

1. Con il nome di corpi fortemente implosi noi intendiamo una classe di corpi in cui la densità è così elevata oppure la massa così grande che gli effetti della Relatività Generale divengono importanti. Fino a poco tempo fa, dopo alcune ricerche iniziali di Landau e di Oppenheimer e coll. (1), lo studio di questi oggetti era stato praticamente abbandonato; ma negli ultimi due anni l'interesse dei ricercatori per questi problemi si è rinnovato per vari motivi. Anzitutto alcuni lavori di F. Hoyle e W. Fowler (2) hanno fatto apparire alquanto plausibile il fatto che le *radiosorgenti quasi-stellari* recentemente scoperte, come 3 C 48 e 3 C 273 (3) siano corpi di massa enorme (10^{80} 10^{10} masse solari) in uno stato più o meno stabile di contrazione gravitazionale. Inoltre, Wheeler e coll. (4) hanno richiamato l'attenzione sulle gravi difficoltà connesse con il problema dell'esistenza di uno stato di minima energia per un sistema di A barioni, quando A è molto grande (dell'ordine del numero di barioni contenuto in una stella, $A \geq 10^{57}$). L'impossibilità di trovare uno stato di minima energia, assumendo la validità delle equazioni della Relatività Generale, per qualunque equazione di stato fisicamente accettabile, pone un problema di importanza fondamentale per la Fisica della Gravità.

In questa Nota ed in quelle successive si espongono alcuni risultati recentemente ottenuti nel corso delle ricerche su questi problemi presso il Laboratorio di Astrofisica dell'Università di Roma (4^a Sezione del Centro Nazionale di Astrofisica del C.N.R.). Una descrizione più dettagliata di questi lavori sarà pubblicata nel volume degli Atti del Colloquio sulla Cosmologia tenutosi a Padova dal 9 all'11 settembre 1964.

(*) Presentata nella seduta del 14 novembre 1964.

(1) J. R. OPPENHEIMER e G. M. VOLKOFF, « Phys. Rev. », 54, 540 (1938); L. D. LANDAU ed M. E. LIFSHITZ, *Statistical Physics* (trad. Inglese), p. 325, 1959; questo libro contiene anche riferimenti bibliografici a lavori anteriori.

(2) F. HOYLE e W. FOWLER, « M. N. », 125, 169 (1963); F. HOYLE e W. FOWLER, « Nat. », 197, 533 (1963); W. FOWLER, « Rev. of Mod. Phys. », 36, 545 (1964).

(3) Per una descrizione delle proprietà osservate di queste radiosorgenti vedi i Rendiconti del « Symposium on Gravitational Collapse, Dallas 1963 » in corso di stampa (University of Chicago Press).

(4) La discussione più completa delle idee di Wheeler è contenuta in un volume in corso di stampa. B. K. HARRISON, K. THORNE, M. WAKANO, J. A. WHEELER, *Gravitational Collapse and Baryon Conservation*; per un sommario delle cose essenziali vedi J. A. WHEELER, *The superdense Star and the critical nucleon number*, in *Gravitation and Relativity*, ed. by H. Y. CHIU e W. F. HOFFMANN, New York 1964.

2. L'elemento lineare per il caso della simmetria sferica si può scrivere

$$(1) \quad ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) - e^\lambda dr^2,$$

dove ν e λ sono funzioni della sola coordinata temporale t e radiale r . Se assumiamo che la pressione P sia unicamente di tipo idrostatico, di modo che il tensore energia-momento in un sistema di coordinate in quiete con la materia ha le componenti

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

si può mostrare che le equazioni gravitazionali di Einstein non identicamente soddisfatte si riducono a

$$(2) \quad \begin{cases} K \frac{P + \varepsilon v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2}, \\ 2 KP = e^{-\lambda} \left[\nu' + \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{1}{r} \right) (\nu' - \lambda') - \frac{1}{c^2} e^{-\lambda} \left[\dot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}}{1} (\dot{\lambda} - \dot{\nu}) \right] \right], \\ K \frac{\varepsilon + P v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}, \\ K \frac{(P + \varepsilon) v e^{(\nu - \lambda)/2}}{1 - v^2/c^2} = - e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r}. \end{cases}$$

In queste equazioni, un apice indica derivazione rispetto ad r ed un punto derivazione rispetto a t ; $K = 8 \pi G/c^4 = 2,075 \times 10^{-48} \text{ cm erg}^{-1}$, ε è la densità di energia e v la velocità macroscopica del fluido. P , ε e v si intendono misurate da un osservatore locale; quindi, per esempio, se r si interpreta come la coordinata di un elemento di fluido che si muove in senso radiale, si ha

$$(3) \quad v = e^{-(\nu - \lambda)/2} \frac{dr}{dt} = e^{-(\nu - \lambda)/2} \dot{r}.$$

Nel caso dell'equilibrio (problema statico) si può porre $v = 0$ ed inoltre tutte le grandezze sono funzioni solamente di r ; è facile allora eliminare ν e λ ricavando il sistema di equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dm}{dr} = 4 \pi \rho r^2, \\ \frac{dP}{dr} = -4 \pi G \frac{(\rho + P/c^2) (m/4 \pi r^3 + P/c^2) r}{1 - (2G/c^2) m/r}, \end{cases}$$

dove si è posto

$$(5) \quad \rho = \varepsilon/c^2$$

ed inoltre

$$(6) \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'.$$

Quindi ρ è la densità ordinaria (gr cm^{-3}) ed m la «massa»; bisogna, però, osservare che siccome r non è la distanza misurata a partire dal centro con regoli o altri mezzi fisici, ma solo una coordinata radiale, m non è la massa nel senso ordinario della parola ma solo una grandezza definita dalla (6). Se con M indichiamo la massa totale e con R il valore di r alla superficie del corpo e se imponiamo la condizione che per $r = R$ l'elemento lineare (1) si trasformi con continuità nell'elemento lineare di Schwarzschild corrispondente ad un punto di massa M situato nell'origine, si trova che λ e ν devono essere dati dalle espressioni

$$(7) \quad \begin{cases} e^{-\lambda} = 1 - \frac{2G}{c^2} \frac{m}{r}, \\ e^{\nu} = \left(1 - \frac{2G}{c^2} \frac{M}{R}\right) \exp\left(-2 \int_0^P \frac{dP}{P + \rho c^2}\right). \end{cases}$$

Allora la *massa propria* interna ad una sfera $r = \text{cost}$, cioè il prodotto della densità per il volume è

$$(8) \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \left(1 - \frac{2G}{c^2} \frac{m}{r}\right)^{-1/2} dr.$$

In particolare la massa propria totale è

$$(9) \quad M(R) = 4\pi \int_0^R \rho r^2 \left(1 - \frac{2G}{c^2} \frac{m}{r}\right)^{-1/2} dr,$$

mentre la *massa osservabile*, cioè misurata da un osservatore esterno attraverso il moto orbitale di un pianeta o con mezzi analoghi è

$$(10) \quad M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr = m(R).$$

La differenza fra M e $M(R)$ rappresenta l'*energia di legame* (in unità di massa), cioè l'energia che si ricava quando la massa M da uno stato completamente disperso viene portata in modo quasi-statico alla configurazione attuale.

3. Le equazioni (4) devono ora essere integrate a partire dal centro ($r = 0$), iniziando con $m = 0$ ed un valore arbitrario (ma finito) di ρ , diciamo ρ_0 ; il primo punto in cui ρ si annulla definisce la posizione della superficie esterna della configurazione.

Naturalmente per effettuare l'integrazione è necessaria una relazione fra P e ρ (impropriamente chiamata l'equazione di stato). Nella teoria ordinaria della costituzione interna delle stelle questa relazione si ricava dallo studio

del trasporto di energia (radiativo o convettivo), e, ovviamente, lo stesso dovrebbe essere fatto anche nel caso presente. Tuttavia, è evidente che, a meno di non considerare dei casi estremamente semplici, senza grande interesse fisico (per esempio $P = 0$, $\rho = \text{cost}$), le equazioni non possono essere risolte che in via completamente numerica, come del resto accade nel caso

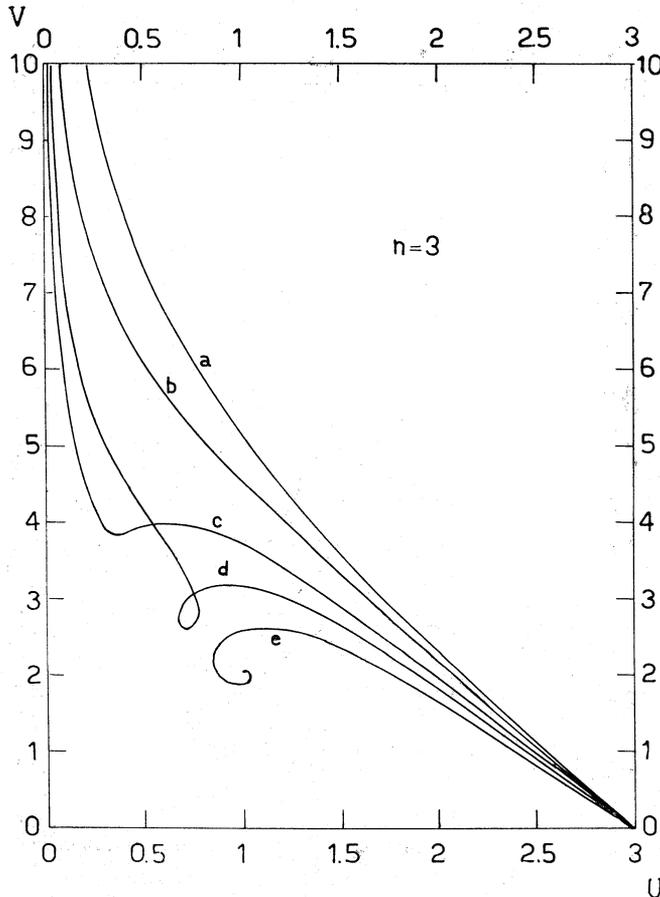


Fig. 1. - Curve integrali nel piano U, V ($n = 3$).

La figura mostra l'andamento di alcune soluzioni dell'equazione (15) nel piano U, V ($n = 3$). Le soluzioni sono contrassegnate rispettivamente con: $a, \varphi_c = 0,01$; $b, \varphi_c = 0,1$; $c, \varphi_c = 0,4$; $d, \varphi_c = 1,0$; la curva e corrisponde al caso relativistico estremo che sarà discusso in un'altra Nota. Nel piano U, V il centro della configurazione corrisponde al punto $(3,0)$, il contorno al punto all'infinito dell'asse V .

della costituzione delle stelle. Invero, se si considera l'enorme mole di calcoli numerici che è stato necessario effettuare prima di ottenere un quadro fisicamente chiaro della struttura interna di una stella e dei processi fisici associati, può sembrare una perdita inutile di tempo quella di considerare modelli troppo semplificati e pensare di ottenere da essi risultati di interesse fisico.

D'altra parte se ci si lascia guidare dallo svolgimento storico della Teoria della Costituzione delle Stelle, è lecito presumere che una idea sia pure grossò-

lana delle configurazioni allo studio si possa ottenere postulando tra P e ρ una relazione analiticamente semplice, per esempio, quella dei gas politropici, $P \sim \rho^\gamma$ con $\gamma = \text{costante}$. È noto infatti che lo studio delle *sfere politropiche* ad opera di Ritter, Kelvin, Betti, Emden ecc. ha costituito il primo ragionevole attacco allo studio della struttura di una stella ed il caso particolare

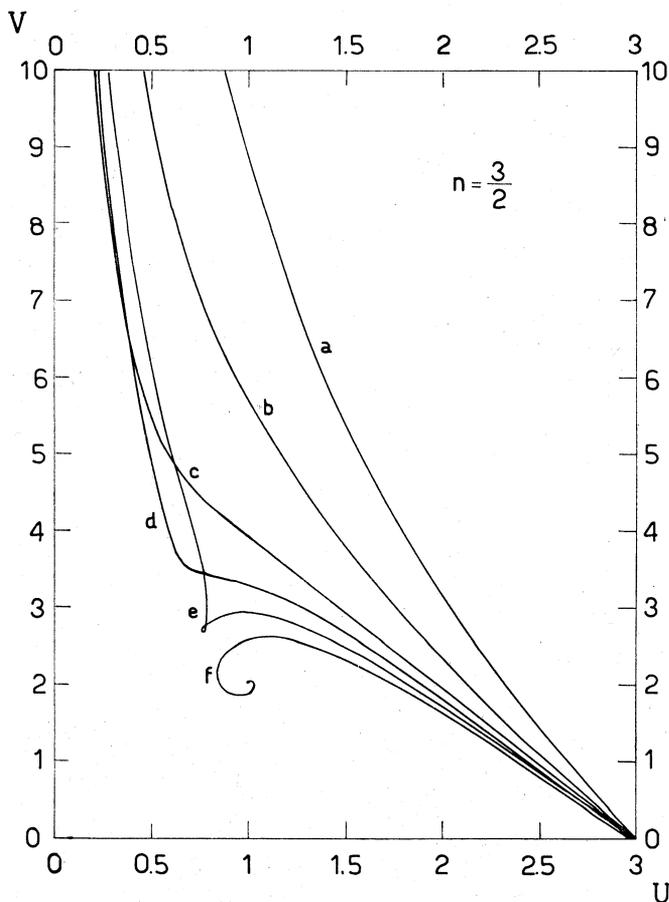


Fig. 2. - Curve integrali nel piano U, V ($n = 3/2$).

Tutto come nella figura 1. I contrassegni delle soluzioni corrispondono a: $a, \varphi_c = 0,03$; $b, \varphi_c = 0,3$; $c, \varphi_c = 1,0$; $d, \varphi_c = 2,0$; $e, \varphi_c = 4,0$; f , caso relativistico estremo.

$\gamma = 4/3$ ha servito ad Eddington per il suo famoso modello « standard » che ha avuto una parte decisiva nello sviluppo della teoria.

Una semplice relazione del tipo $P \sim \rho^\gamma$ non appare, però, la più conveniente nel caso relativistico, per il fatto che quando la densità di energia diventa elevatissima ($\epsilon \rightarrow \infty$), la pressione deve tendere, come è noto, al valore limite $P = \epsilon/3$, mentre in generale $P \leq \epsilon/3$, perché in caso diverso la velocità locale del suono sarebbe maggiore della velocità della luce.

TABELLA I.

Costanti delle politropiche relativistiche per $n = 3$.

φ_c	$\varphi_c^n (1 + 3\varphi_c)$	ξ_1	θ_1	μ_1	$\rho_c/\bar{\rho}$	m_1
0,001	$1,003 \times 10^{-9}$	19495	0,002315	45,13	53,9	1,0029
0,002	$8,048 \times 10^{-9}$	9744	0,004577	44,60	55,6	1,0045
0,003	$2,724 \times 10^{-8}$	6493	0,00679	44,09	56,4	1,0059
0,01	$1,030 \times 10^{-6}$	1946	0,02095	40,76	62,0	1,0201
0,03	$2,943 \times 10^{-5}$	653,5	0,05085	33,23	82,4	1,0469
0,1	$1,300 \times 10^{-3}$	227,5	0,08544	19,44	$2,63 \times 10^2$	1,1183
0,2	$1,280 \times 10^{-2}$	194,3	0,06279	12,20	$2,56 \times 10^3$	1,1680
0,3	$5,130 \times 10^{-2}$	377,2	0,02675	10,09	$9,10 \times 10^4$	1,1794
0,4	$1,408 \times 10^{-1}$	1052	0,01137	11,96	$4,57 \times 10^6$	1,1463
0,43	$1,8208 \times 10^{-1}$	1148	0,01134	13,02	$5,02 \times 10^6$	1,1344
0,5	$3,125 \times 10^{-1}$	1060	0,01409	14,94	$8,31 \times 10^6$	1,1205
0,7	1,0633	690,7	0,02367	16,35	$8,23 \times 10^6$	1,1193
1,0	4,000	517,7	0,02996	15,51	$1,19 \times 10^7$	1,1315

TABELLA II.

Costanti delle politropiche relativistiche per $n = 3/2$.

φ_c	$\varphi_c^n (1 + 3\varphi_c)$	ξ_1	θ_1	μ_1	$\rho_c/\bar{\rho}$	m_1
0,01	$1,030 \times 10^{-3}$	25,00	0,03435	0,8587	6,247	1,015
0,03	$5,664 \times 10^{-3}$	17,92	0,08930	1,600	6,790	1,042
0,1	$4,111 \times 10^{-2}$	11,42	0,1983	2,265	9,012	1,106
0,2	$1,431 \times 10^{-1}$	8,438	0,2586	2,182	13,13	1,169
0,3	$3,122 \times 10^{-1}$	7,146	0,2768	1,978	19,20	1,203
0,5	0,8839	5,993	0,2743	1,644	38,58	1,242
0,7	1,816	5,616	0,2555	1,435	74,73	1,264
1,0	4,000	5,617	0,2245	1,261	$1,874 \times 10^2$	1,278
1,5	10,10	6,195	0,1879	1,164	$6,876 \times 10^2$	1,277
2,0	19,80	6,845	0,1724	1,180	$1,794 \times 10^3$	1,189

Per queste considerazioni, sembra che l'estensione naturale dell'equazione delle politropiche al caso relativistico sia data dalla equazione

$$(11) \quad \varepsilon = 3 P + Q P^q;$$

con Q e q costanti: inoltre $q < 1$, di modo che quando $P \rightarrow 0$, il primo termine a 2° membro si può trascurare rispetto al secondo e la (11) diviene identica all'equazione ordinaria di un gas politropico, mentre per $P \rightarrow \infty$ si ha il comportamento asintotico richiesto.

In altre parole, il punto di vista che qui si adotta è il seguente: nulla vieta, evidentemente, di rappresentare la relazione fra P e ρ , che si ottiene

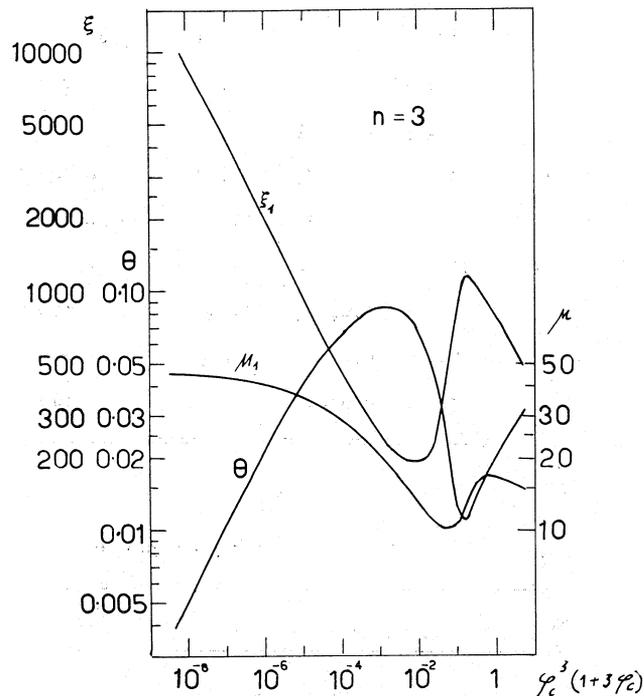


Fig. 3. - Parametri delle configurazioni per $n = 3$.

I parametri ξ_1 (raggio), μ_1 (massa osservabile), θ_1 (campo gravitazionale alla superficie), sono rappresentati in funzione di $\varphi_c^3(1+3\varphi_c)$ (densità centrale); i numeri a sinistra si riferiscono a ξ_1 e θ_1 quelli a destra a μ_1 .

nell'interno di una distribuzione di materia sfericamente simmetrica eliminando r , mediante un'equazione del tipo (11) con Q e q eventualmente variabili da un punto all'altro. L'ipotesi che sta alla base del modello adottato è che assumendo Q e q costanti si possa ottenere un'approssimazione non troppo cattiva dello stato reale delle cose. Solo un confronto con una configurazione realmente esistente (ove ciò sia possibile) potrà dire se questo modello sia o no adeguato. È importante, però, osservare che esso è, per lo meno, fisicamente conseguente; per esempio, non conduce ad una velocità del suono superiore a quella della luce.

Il problema diviene ora estremamente semplice. Per il calcolo, le variabili fisiche sono sostituite da variabili adimensionali, ponendo

$$(12) \quad \begin{cases} r = A\xi \\ P = \frac{B}{c^2} \theta^{1/(1-q)} = B\theta^{n+1}, \\ \rho = \frac{B}{c^2} \theta^n (1 + 3\theta). \end{cases}$$

$n = q/(1-q)$ è quello che nella teoria ordinaria si chiama l'*indice politropico*.

Inoltre si definisce

$$(13) \quad \varphi = \frac{2G}{c^2} \frac{m}{r},$$

e le costanti dimensionali A e B vengono scelte in modo da soddisfare le condizioni

$$(14) \quad \begin{cases} B = Q^{n+1} \\ BA^2 = \frac{1}{K} = 4,819 \times 10^{47} \text{ erg cm}^{-1}. \end{cases}$$

Le equazioni (4) si trasformano così nelle

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = \xi\varphi^n (1 + 3\varphi) - \frac{\varphi}{\xi}, \\ \frac{d\theta}{d\xi} = -\frac{1}{2(n+1)} \frac{\xi(1+4\varphi)(\theta/\xi^2 + \varphi^{n+1})}{1-\theta}. \end{cases}$$

Queste devono essere integrate con i valori iniziali $\theta = 0$, $\varphi = \varphi_c$ per $\xi = 0$, fino al punto in cui $\varphi = 0$; il valore corrispondente di ξ , ξ_1 , definisce la superficie della sfera ed il valore di θ per $\xi = \xi_1$, θ_1 , è equivalente al potenziale newtoniano alla superficie. Il prodotto $\mu = \xi\theta$ è una misura (adimensionale) della massa interna alla superficie $\xi = \text{cost}$, in particolare $\mu_1 = \xi_1 \theta_1$ definisce la massa totale (osservabile), mentre il rapporto fra la massa propria e la massa osservabile è

$$(16) \quad \frac{M(R)}{M} = \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\mu_1} \frac{d\mu}{1-\theta}.$$

Notiamo, infine, i seguenti sviluppi in serie validi per $\xi \rightarrow 0$,

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi = \varphi_c (1 - C\xi^2 + \dots), \\ \theta = \frac{\varphi_c(1+3\varphi_c)}{3} \left[1 - C \left(n + \frac{3\varphi_c}{1+3\varphi_c} \right) \xi^2 + \dots \right] \xi^2, \end{cases}$$

con

$$C = \frac{\varphi_c^{n-1} (1+4\varphi_c)(1+6\varphi_c)}{12(n+1)}.$$

Questi sono necessari per iniziare le integrazioni dato che per $\xi = \theta$ le derivate prime di φ e θ si annullano.

Un certo numero di soluzioni per gli indici politropici $n = 3$ ed $n = 3/2$ sono state calcolate per mezzo del calcolatore elettronico LGP 30 del Laboratorio di Astrofisica, impiegando un metodo di Runge-Kutta con ricerca auto-

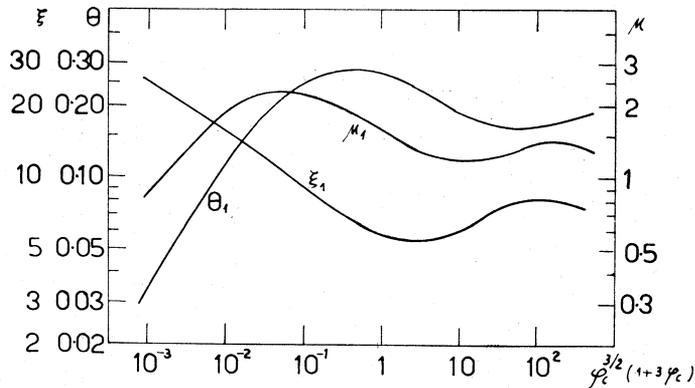


Fig. 4. - Parametri delle configurazioni per $n = 3/2$.

Tutto come nella figura 3.

matica del passo. L'andamento di alcune di queste soluzioni nel piano delle variabili « omologiche »

$$\left\{ \begin{aligned} U &= \frac{d \log m}{d \log r} = \frac{\xi^2 (1 + 3 \varphi) \varphi^n}{\theta}, \\ V &= - \frac{d \log P}{d \log r} = \frac{1 + 4 \varphi}{2 \varphi} \frac{\theta + \xi^2 \varphi^n + 1}{1 - \theta} \end{aligned} \right.$$

è illustrato nelle figg. 1 e 2. In questo piano il punto $U = 3$, $V = 0$ corrisponde al centro della configurazione, mentre la superficie corrisponde a $U = 0$, $V = \infty$.

I valori di ξ_1 , θ_1 , μ_1 , del rapporto $M(R)/M$, nonché del rapporto fra la densità al centro e la densità media

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \frac{\xi_1^2 \varphi_c^n (1 + 3 \varphi_c)}{3 \theta_1},$$

per diversi valori di φ_c sono contenuti nelle Tabelle I e II ed illustrati nelle figg. 3 e 4.