Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Beniamino Segre

Sull'hessiano di taluni polinomi (determinanti, pfaffiani, discriminanti, risultanti, hessiani). Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.5, p. 215–221.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_5_215_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 novembre 1964

Presiede il Presidente ELIGIO PERUCCA

NOTE DI SOCI

Algebra. — *Sull'hessiano di taluni polinomi (determinanti, pfaffiani, discriminanti, risultanti, hessiani)* (*). Nota II (**) del Socio BENIAMINO SEGRE.

V. – HESSIANO DI UN DISCRIMINANTE.

11. La più generale forma $f = f(x)$ di dato grado k (≥ 2) in $r+1$ (≥ 2) variabili $x_0, x_1, \cdots, x_r$ contiene linearmente ed omogeneamente

$$s + 1 = \binom{k+r}{k}$$

coefficienti, che denoteremo genericamente con a. Il discriminante

$$D = D(a)$$

di f rispetto alle x è una forma nelle a, notoriamente di grado $(r+1)(k-1)^r$ (cfr. ad esempio B. Segre [4], p. 470), il cui hessiano verrà designato con H_D.

Se interpretiamo le x e le a quali coordinate proiettive omogenee di punto in due spazi S_r, S_s, otteniamo una rappresentazione omografica su S_s del sistema lineare ∞^s di tutte le ipersuperficie f d'ordine k di S_r (di equazione $f = 0$). L'ipersuperficie D di S_s (avente cioè ivi l'equazione $D = 0$) appare

(*) Continuazione della Nota I, apparsa alle pp. 109–117 di questo volume dei « Rendiconti ».

(**) Presentata nella seduta del 14 novembre 1964.

così quale imagine del sistema continuo delle f singolari di S_r. Più precisamente, il generico punto f_0 di D (è punto semplice di D e) rappresenta una forma f di S_r avente un unico punto singolare, P_0, che risulta punto doppio ordinario di f.

In base ad una nota proprietà, l'iperpiano tangente all'ipersuperficie D nel punto f_0 risulta l'imagine del sistema lineare ∞^{s-1} che si ottiene imponendo il passaggio (semplice) per P_0 alle ipersuperficie d'ordine k di S_r. Ne consegue che D ammette tanti iperpiani tangenti quanti sono i punti P_0 di S_r, ossia esattamente ∞^r (cfr. B. Segre [2], n. 4); numero questo che risulta inferiore a quello ∞^{s-1} dei punti f_0 di D, ove si eccettui soltanto il caso banale $r = 1$, $k = 2$. Pertanto, *con la sola eccezione di questo caso, l'ipersuperficie discriminante* D *ha carattere di sviluppabile.*

Il comportamento delle ipersuperficie algebriche sviluppabili nei confronti della loro hessiana trovasi studiato sotto forma generale in B. Segre [3]; e non v'è che da applicare al caso attuale il « theor. 2 » (ivi stabilito nel § 6), per ottenere la prima parte del teor. V (qui enunciato nel n. 1). La seconda parte segue allora subito rilevando che ogni derivata parziale t^{ma} di H_D rispetto alle a, con

$$t \leq s + 1 - (r + 3) = \binom{k+r}{k} - r - 3\,,$$

può venire espressa quale combinazione lineare dei minori d'ordine $r + 3$ del determinante (d'ordine $s + 1$) H_D, e si annulla quindi nei punti dell'ipersuperficie D.

12. Con le notazioni del n. 11 si può osservare che, per $k = 2$ (e quindi $r \geq 2$), D si identifica col più generale determinante simmetrico d'ordine $n = r + 1$. La seconda parte del teor. V non è allora che una porzione del nostro precedente teor. II, e trovasi già – acquisita precisamente allo stesso modo del n. 11 – nel § 8 di B. Segre [3].

Rileviamo inoltre che – nel caso testé considerato $k = 2$, $r \geq 2$ – l'esponente di cui alla chiusa dell'enunciato del teor. V (n. 1) assume esattamente il valore ivi specificato. Ciò ha ancora luogo ad esempio per $k = 4$, $r = 1$, ma non per $k = 3$, $r = 1$, nel qual caso a tale esponente si può di fatto attribuire un valore maggiore del suddetto (2 invece di 1): proprietà queste che già trovansi in B. Segre [3], § 9. La seconda di esse viene completata dal seguente teorema, di cui per brevità omettiamo la dimostrazione.

L'hessiano H_D *del discriminante* D *della più generale forma cubica binaria è dato da* $H_D = 2^4 \cdot 3^5 \cdot D^2$.

Si può congetturare che quest'ultimo caso ($k = 3$, $r = 1$) sia il solo in cui un discriminante D possa entrare in H_D a fattore con esponente maggiore di quello specificato dal teor. V.

L'altra suaccennata eventualità $k = 4$, $r = 1$ risulta approfondita dal seguente teorema, che qui – per brevità – ci limitiamo del pari ad enunciare.

L'hessiano H_D *del discriminante* $D = 2^8(S^3 - 27T^2)$ *della più generale quartica binaria* f *è dato da*

$$H_D = -2^{30}\cdot 3^6\cdot 5\cdot S(S^3 - 54T^2)D^2,$$

dove S *e* T *designano i ben noti invarianti di Salmon della* f.

Questo risultato, oltre ad implicare che attualmente H_D – d'accordo con la precedente congettura – è divisibile per D^2 e non per D^3, mostra come sulla retta vi siano esattamente due tipi di quaterne di punti distinti aventi $H_D = 0$: le *quaterne equianarmoniche* (per le quali $S = 0$) e quelle aventi *l'invariante assoluto* $S^3/T^2 = 54$.

VI. – RISULTANTE DI UN SISTEMA DI FORME IN UNA O PIÙ SERIE DI VARIABILI, E RELATIVO HESSIANO.

13. Riferiamoci ora ai polinomi

$$f_0,\ f_1,\ \cdots,\ f_\varrho \tag{27}$$

di cui al teor. VI (enunciato nel n. 1) e denotiamo con

$$x_{i0},\ x_{i1},\ \cdots,\ x_{ir_i} \tag{28}$$

le variabili della i^{ma} serie e con a_j i coefficienti che compaiono (linearmente ed omogeneamente) in f_j $(j = 0, 1, \cdots, \rho)$. Il numero delle a_j è dato manifestamente da

$$\nu_j = \prod_{i=1}^{k}\binom{n_{ji}+r_i}{r_i};$$

sicché le a sono (indeterminate indipendenti) nel numero complessivo di

$$\nu + 1 = \sum_{j=0}^{\varrho}\nu_j = \sum_{j=0}^{\varrho}\prod_{i=1}^{k}\binom{n_{ji}+r_i}{r_i}. \tag{29}$$

Le variabili (28) possono venire interpretate quali coordinate omogenee di punto in uno spazio S_{r_i}; la relativa varietà prodotto

$$V_\varrho = S_{r_1}\times S_{r_2}\times\cdots\times S_{r_k}$$

ha la dimensione

$$\rho = r_1 + r_2 + \cdots + r_h, \tag{30}$$

e su essa ciascun'equazione $f_j = 0$ definisce un' ipersuperficie.

I punti comuni alle ρ ipersuperficie di V_ϱ:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ \cdots,\ f_\varrho = 0 \tag{31}$$

sono notoriamente in numero M finito, esprimibile sotto la forma

$$M = \text{coefficiente di } (z_1^{r_1} z_2^{r_2}\cdots z_k^{r_k}) \text{ nel polinomio } \prod_{j=1}^{\varrho}\sum_{i=1}^{k} n_{ji}z_i \tag{32}$$

(ciò si deduce da noti risultati, per i quali cfr., anche per ulteriori citazioni, C. Segre [5], p. 928). Una non difficile generalizzazione della classica teoria del risultante di r (≥ 2) forme in r variabili (per quest'ultima, cfr. ad esempio B. Segre [4], pp. 384–401), mostra che il risultante R (di cui al teor. VI) dei polinomi (27) rispetto alle loro k serie di variabili (28) può venir scritto sotto la forma

$$R = \text{cost.} \prod_{l=1}^{M} f_0^{(l)},$$

dove $f_0^{(l)}$ denota la forma lineare nelle a_0 che si deduce da f_0 scrivendo al posto delle variabili x le coordinate dell'l^{mo} fra gli M punti comuni alle (31), presi in ordine arbitrario e, ad esempio, normati in modo da ridurre all'unità una delle coordinate non nulle in ciascuna serie (28).

Ne consegue che R è una forma nelle a_0, il cui grado M viene precisamente fornito dalla (32); e risultati analoghi sussistono per gli altri insiemi di coefficienti $a_1, a_2, \cdots, a_s$. Dunque il grado complessivo di R nelle a vale

$$(33) \qquad N = \text{coeff. di } (z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_k^{r_k}) \text{ nel polinomio } \left[\left(\sum_{j=0}^{\rho} 1 \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_{ji} z_i\right) \cdot \prod_{j=0}^{\rho} \sum_{i=1}^{k} n_{ji} z_i\right].$$

Sicché l'hessiano H_R di R rispetto alle $\nu + 1$ indeterminate a ha in esse complessivamente grado $(\nu + 1)(N - 2)$, dove ν, N si calcolano mediante le (29), (33); e si vede anche subito che H_R risulta una forma nelle ν_j indeterminate a_j, avente in esse il grado dato da:

$$\left\{\text{coefficiente di } (z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_k^{r_k}) \text{ nel polinomio } \left[\left(1 \Big/ \sum_{i=1}^{k} n_{ji} z_i\right) \cdot \prod_{j=0}^{\rho} \sum_{i=1}^{k} n_{ji} z_i\right]\right\}(\nu + 1) - 2\nu_j.$$

14. Stabiliamo ora il

LEMMA 3. – *In uno spazio* S_ν *in cui le* $\nu + 1$ *indeterminate* a *siano coordinate omogenee di punto, l'ipersuperficie* R (*di equazione* $R = 0$) *ammette tutt'al più* $\infty^{2\rho}$ *iperpiani tangenti*, ρ *essendo dato dalla* (30).

Il generico punto a di R è semplice per R e – in base al n. 13 – definisce univocamente un punto (28) in ciascuno spazio S_{r_i}, per il quale è lecito supporre la prima coordinata x_{i0} ridotta all'unità, in guisa che i suddetti valori delle a, x soddisfino al sistema

$$f_j = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, \rho).$$

Differenziando, poiché è consentito supporre $dx_{i0} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$, da qui si deduce:

$$\sum_a \frac{\partial f_j}{\partial a} da + \sum_{i=1}^{k} \sum_{h=1}^{r_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_{ih}} dx_{ih} = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, \rho).$$

Se ora si eliminano fra queste $\rho + 1$ equazioni i ρ differenziali dx_{ih} $(h = 1, 2, \cdots, r_i;$ $i = 1, 2, \cdots, k)$, si ottiene una relazione del tipo:

$$\sum_a \left(\sum_{j=0}^{\rho} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial a}\right) da = 0.$$

Le espressioni che qui figurano entro parentesi non contengono se non in apparenza le a, e non sono palesemente altro che le coordinate grassmanniane dell'iperpiano tangente in a ad R. Esse dipendono omogeneamente dalle k serie di variabili (28), ossia dai punti della V_ϱ di cui al n. 13, nonché dalle $\rho + 1$ variabili λ; e ciò rende manifesto che l'infinità degli iperpiani tangenti di R vale al più 2ρ, come asserito dal lemma.

Si noti ora che, in base alle (29), (30), la differenza fra l'infinità $\nu - 1$ dei punti di R e la 2ρ suddetta uguaglia precisamente l'intero attribuito come esponente ad R nell'enunciato del teor. VI (n. 1); questo intero risulta poi sempre positivo, tranne nel caso banale $k = n_{ji} = r_i = 1$, in cui esso riducesi allo zero. Avuto riguardo al § 6 di B. Segre [3], ne discende senz'altro il teor. VI (enunciato al n. 1).

15. Nel caso speciale in cui ci si riferisca ad una sola serie di $r + 1$ variabili ($k = 1$), e che le f siano loro forme lineari ($n_{ji} = 1$), il risultante R non è altro che il determinante dei coefficienti di queste ultime, ed è quindi il più generale determinante d'ordine $r + 1$ (ad elementi indeterminati). Il teor. VI fornisce allora subito la parte geometrica del teor. I.

Un altro caso particolare interessante è quello ($k = \rho = r_1 = 1$) di due forme binarie f_0, f_1, di dati gradi n_0, n_1. Il relativo risultante R può per esempio venir scritto sotto forma di un determinante (di Sylvester) d'ordine $n_0 + n_1$, e – in conformità col n. 13, od in base alla forma stessa di questo determinante – ha grado n_1 negli $n_0 + 1$ coefficienti a_0 di f_0 e grado n_0 negli $n_1 + 1$ coefficienti a_1 di f_1. Il teor. VI porge allora senz'altro il seguente

COROLLARIO. – *Il risultante* R *di due forme binarie di gradi* n_0, n_1 (≥ 1) *entra a fattore nel proprio hessiano* H_R *con esponente almeno uguale a* $n_0 + n_1 - 2$.

Si noti che, se entrambi i gradi n_0, n_1 valgono 1, quest'ultimo intero vale zero e si ha $H_R = 1$; sicché il corollario appare allora come ovvio, e l'esponente ivi assegnato ad R non può venire aumentato. Il corollario risulta anche banale nell'ipotesi che *uno ed uno solo dei gradi*, ad esempio n_0, *valga* 1, in tal caso *avendosi identicamente* $H_R = 0$; ed invero, R contiene allora linearmente gli $n_1 + 1$ coefficienti a_1, sicché H_R – tenuto conto della (29) – si esprime come un determinante d'ordine $n_0 + n_1 + 2 = n_1 + 3$ che ha nulli tutti gli elementi di un suo minore d'ordine $n_1 + 1$, ed è quindi nullo (essendo per ipotesi $n_1 \geq 2$).

L'esponente di cui al corollario risulta di fatto maggiore di $n_0 + n_1 - 2$ nell'ipotesi in cui sia $n_0 = n_1 = 2$, in quanto:

L'hessiano H_R *del risultante* R *di due forme binarie quadratiche è dato da* $H_R = -48\,R^3$.

Ed invero, ogniqualvolta sia $n_0 = n_1$, R – e quindi altresì H_R – è un invariante (non soltanto della coppia f_0, f_1, ma addirittura) del fascio $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$, e cioè della relativa g_n^1. Avuto riguardo a ciò che sulla retta le g_2^1 non paraboliche sono fra loro a due a due omografiche, un'argomentazione analoga a quella che al n. 4 ci ha condotto alla (10) mostra che attualmente dev'essere $H_R = cR^3$, con c costante. E si vede poi che è $c = -48$, con l'applicare quest'ultima relazione al caso speciale in cui si assuma $f_0 = x_0^2$, $f_1 = x_1^2$, verificandosi direttamente che allora risulta $R = 1$, $H_R = -48$.

Si può congetturare che il caso $n_0 = n_1 = 2$ contemplato nell'ultimo enunciato sia il solo in cui il risultante R di due forme binarie di gradi $n_0 \geq 2$, $n_1 \geq 2$ entri a fattore nel proprio H_R con esponente maggiore di $n_0 + n_1 - 2$, e proporsi di esaminare quale significato abbia per le forme f_0, f_1 l'annullarsi del loro invariante simultaneo $H_R/R^{n_0+n_1-2}$. Risponderemo a queste domande nell'ipotesi che sia $n_0 = 2$, $n_1 = 3$, mostrando che:

Per una forma binaria quadratica f_0 *ed una forma binaria cubica* f_1 *risulta precisamente* $H_R = -12\, D^3R^3$, *ove* D *designa il discriminante di* f_0.

Per dimostrarlo, notiamo anzitutto che — in base al n. 13 – R ed H_R hanno nei coefficienti a_0, a_1 delle f_0, f_1 i gradi rispettivi (3, 2) e (15, 6). Pertanto, il quoziente H_R/R^3 (a norma del corollario) risulta una forma sia nelle a_0 che nelle a_1, avente in esse ordinatamente i gradi (6, 0); tale quoziente è quindi un invariante della sola forma binaria quadratica f_0, che non può dunque differire che per un fattore c numerico dal cubo del discriminante D di questa. Si vede infine che è $c = -12$, specificando le f nelle

$$f_1 = x_0 x_1 \quad , \quad f_1 = x_0^3 + x_1^3,$$

ed osservando che il calcolo diretto porge allora senza difficoltà:

$$R = -1 \quad , \quad H_R = -12 \quad , \quad D = -1.$$

VII. – Hessiano dell'hessiano di una forma cubica.

16. Stabiliremo da ultimo il teor. VII, quale immediata conseguenza del

LEMMA 4. – *Se* f *è una generica ipersuperficie cubica di* S_r $(r \geq 3)$, *di cui* h *designi l'hessiana, il generico punto* O *comune alle* f, h *risulta semplice e parabolico* (*non soltanto per* f, *ma anche*) *per* h, *ed in esso le* f, h *non si toccano.*

Per dimostrarlo, introduciamo in S_r coordinate proiettive non omogenee $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ di origine O, tali che l'iperpiano tangente ad f in O abbia in esse l'equazione $x_1 = 0$. Poiché O risulta un punto parabolico ordinario di f, il relativo cono asintotico dovrà (giacere in quell'iperpiano) essere del 2° ordine ed ammettere una retta doppia, che possiamo assumere come asse x_2. Si vede allora agevolmente che si possono scegliere gli altri assi ed il punto unità in guisa che il primo membro dell'equazione $f = 0$ di f diventi del tipo

$$f = x_1 + \left[x_1 x_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{r} x_i^2\right] + \varphi,$$

dove denotiamo con φ una generica forma cubica nelle variabili x; le derivate parziali di φ rispetto a tali variabili verranno in seguito designate apponendo a φ gli indici a queste relativi.

L'hessiano h di f è conseguentemente dato dal seguente determinante d'ordine $r + 1$:

$$h = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2 + x_2 & x_1 & x_j \\ 2 + x_2 & \varphi_{11} & 1 + \varphi_{12} & \varphi_{1j} \\ x_1 & 1 + \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{2j} \\ x_i & \varphi_{i1} & \varphi_{i2} & \delta_{ij} + \varphi_{ij} \end{vmatrix}_{i,j=3,4,\cdots,r},$$

in cui interviene il noto simbolo δ_{ij} di Kronecker. Sviluppando questo determinante si ottiene senza difficoltà che risulta precisamente

$$h = 2\,(x_1 - 2\,\varphi_{22})\left(1 + x_2 + \sum_{i=3}^{r} \varphi_{ii}\right) + \sum_{i=3}^{r} (x_i - 2\,\varphi_{i2})^2 + \cdots,$$

dove i puntini stanno per termini nelle x di grado superiore al secondo.

Dunque, come asserito dal lemma, l'ipersuperficie h (di equazione $h = 0$) passa semplicemente per O, essendo ivi toccata dall'iperpiano $x_1 = 2\varphi_{22}$, distinto da quello ($x_1 = 0$) tangente in O alla f. Inoltre O risulta punto parabolico di h, in quanto il relativo cono asintotico ammette manifestamente come doppia la retta di equazioni:

$$x_1 = 2\varphi_{22}\,, \quad x_3 = 2\varphi_{23}\,, \quad x_4 = 2\varphi_{24}\,, \quad \cdots, \quad x_r = 2\varphi_{2r}\,.$$

17. In virtù del lemma testé stabilito, f ed h si segano lungo una $V_{r-2}^{3(r+1)}$ priva di componenti multiple, la quale giace interamente sull'hessiana di h. Basta quindi applicare a questa V ed alle f, h una ben nota estensione del teorema $Af + B\varphi$ di Noether (per la quale cfr. ad esempio Bertini [1], p. 333), per ottenere il teor. VII (enunciato nel n. 1) sotto la condizione aggiuntiva $r \geq 3$.

Questo teorema sussiste altresì per $r = 2$, come subito si desume da classiche proprietà dei f a s c i s i z i g e t i c i di cubiche piane. E si può anche osservare che la dimostrazione dianzi esposta per $r \geq 3$ continua a valere per $r = 2$, con ovvie varianti semplificative.

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed. (Messina, Principato, 1923).

[2] B. SEGRE, *Dei sistemi lineari tangenti ad un qualunque sistema di forme*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (5), *33*, 182–185 (1924)₁.

[3] B. SEGRE, *Bertini forms and Hessian matrices*, « Journ. of the London Math. Soc. », *26*, 164–176 (1951).

[4] B. SEGRE, *Istituzioni di geometria superiore* (Roma, Istituto Matematico « Guido Castelnuovo », 1962).

[5] C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume*, « Encycl. d. math. Wiss. », III 2. Heft 7 (pp. 769–972).