Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Zacher

I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.3-4, p. 150–154.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_3-4_150_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Matematica. — *I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi–normali.* Nota [*] di
GIOVANNI ZACHER, presentata dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

Un sottogruppo H di un gruppo G dicesi quasi–normale se è permutabile con ogni sottogruppo di G. Tale nozione fu introdotta da Ore in [5], e fu oggetto di studio da parte di diversi Autori. Ore, tra l'altro, dimostrò che un sottogruppo quasi–normale massimo di G è normale in G; ne segue che in un gruppo finito G un sottogruppo quasi–normale è anche un sottogruppo di composizione di G. Ma, mentre i sottogruppi di composizione di un gruppo finito G formano un sottoreticolo $\mathfrak{L}_c(G)$ del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G [7], l'insieme $q(G)$ dei sottogruppi quasi–normali di G non è chiuso, in generale, rispetto all'operazione di intersezione tra gruppi [1].

In quanto segue si determineranno i gruppi risolubili finiti in cui l'insieme $q(G)$ coincide con $\mathfrak{L}_c(G)$. La caratterizzazione che si assegna permette facilmente di costruire i gruppi in questione e di decidere quando due tali gruppi sono isomorfi.

1. Premettiamo la seguente

Definizione: Un gruppo G è un q–gruppo se in esso la relazione di quasi–normalità è transitiva, vale a dire se ogni sottogruppo H, quasi–normale in un sottogruppo K quasi–normale in G, è quasi–normale in G.

Ci sarà conveniente di esprimere la quasi–normalità di un gruppo H in K con la notazione $H \underset{q}{\subseteq} K$.

1.1. Se G è un q–gruppo, l'insieme $q(G)$ dei sottogruppi quasi–normali di G forma un sottoreticolo $\mathfrak{L}_q(G)$ del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ dei sottogruppi di G.

Infatti se A, B appartengono a $q(G)$, anche $A \cup B$ vi appartiene. Da $B \underset{q}{\subseteq} G$ segue poi $A \cap B \underset{q}{\subseteq} A$ [1], e quindi per l'ipotesi su G, $A \cap B$ è quasi normale in G.

1.2. I gruppi immagini omomorfe di un q–gruppo, sono q–gruppi, e sottogruppi quasi–normali di un q–gruppo sono q–gruppi.

Basta osservare che se $\overline{H} \underset{q}{\subseteq} \overline{G}$ e ρ è un omomorfismo di G su $\overline{G}$, allora l'immagine completa inversa $H = \rho^{-1}(\overline{H})$ è quasi–normale in G, e che da $H \underset{q}{\subseteq} G$, segue pure $\rho(H) \underset{q}{\subseteq} \overline{G}$ [1].

Se G è un gruppo finito, allora, come ha fatto vedere Ore, $q(G)$ è contenuto in $\mathfrak{L}_c(G)$ [5]. Supponiamo ora che G sia un q–gruppo finito ed H un

(*) Pervenuta all'Accademia il 24 ottobre 1964.

(1) Vedasi ad esempio [1] p. 127.

suo sottogruppo di composizione. Se $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_n = G$ è la parte superiore di una serie di composizione di G passante per H, allora H è certamente quasi–normale in G se $n = 0$. Altrimenti H è un sottogruppo di composizione di H_{n-1} ed H_{n-1} è un q–gruppo, in quanto H_{n-1} è quasi–normale in G; ma allora per induzione possiamo supporre che H sia quasi–normale in H_{n-1} e quindi pure in G, per la transitività. Pertanto è $q(G) \supseteq \mathfrak{L}_c(G)$ e quindi in un q–gruppo finito si ha $q(G) = \mathfrak{L}_c(G)$. Supponiamo, viceversa, che nel gruppo finito G, l'insieme $q(G)$ coincida con $\mathfrak{L}_c(G)$. Se $H \underset{q}{\subseteq} G$, $K \underset{q}{\subseteq} H$, allora H appartiene a $\mathfrak{L}_c(G)$ e K ad $\mathfrak{L}_c(H)$, per cui K è un sottogruppo di composizione di G. Ma allora K appartiene a $q(G)$, e G è dunque un q–gruppo. Possiamo pertanto affermare che:

1.3. Condizione necessaria e sufficiente affinché nel gruppo finito G si abbia $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$ è che G sia un q–gruppo.

Corollario 1.4. In un q–gruppo finito, $\mathfrak{L}_c(G)$ è un reticolo modulare.

Infatti $\mathfrak{L}_c(G)$ coincide con $q(G)$, e quindi due qualunque gruppi di $\mathfrak{L}_c(G)$ sono tra loro permutabili.

1.5. Sia G un q–gruppo finito, ed N un sottogruppo normale minimo di G. Allora N è un gruppo semplice.

Il gruppo N è un prodotto diretto di gruppi semplici isomorfi N_i, con N_i elemento di $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$.

a) N_i non è abeliano. Poiché N_i è semplice, N_i non è speciale. Ma allora N_i è normale in G (teorema 1 in [3]), e dunque $N = N_i$;

b) N_i è abeliano. N è dunque un gruppo abeliano elementare d'ordine p^n con p numero primo, $n \geq 1$. Se G_p è un p–gruppo di Sylow di G, sarà $N \subseteq G_p$, e possiamo supporre che N sia nel centro di G_p, essendo N normale in G_p, per cui N_1 è normale in G_p. Se G_r è un sottogruppo di Sylow di G relativo ad un numero primo $r \neq p$, N_1 è normale in $N_1 \cup G_r$, essendo $N_1 \underset{q}{\subseteq} N_1 \cup G_r$. Pertanto N_1 è normale in G, e dunque $N = N_1$.

Corollario 1.6. Un q–gruppo finito risolubile è supersolubile.

Infatti se N è un sottogruppo normale minimo di G, N ha ordine primo p per 1.4. G/N è un q–gruppo per 1.2. Applicando induzione, G/N e quindi G stesso è supersolubile.

1.7. Detto G un q–gruppo finito risolubile, indichiamo con $K_\infty(G)$ il sottogruppo di G intersezione di tutti i sottogruppi normali di G a fattoriale speciale. Allora $K_\infty(G)$ è un sottogruppo di Hall d'ordine dispari, abeliano e se H è un complemento di $K_\infty(G)$ in G, H è un sottogruppo speciale modulare, ed ogni suo elemento induce in $K_\infty(G)$ un automorfismo, che lascia fermi tutti i sottogruppi di $K_\infty(G)$ (2).

Dimostrazione: Se G è un q–gruppo finito risolubile, G è supersolubile (corol. 1.6) e quindi pure dispersibile. Se p è il massimo divisore primo dell'ordine di G, il p–sottogruppo di Sylow S di G è dunque normale in G, per cui

(2) Un tale automorfismo ρ è un potenza di N, nel senso che esiste un intero n dipendente solo da ρ tale che $x^\rho = x^n$ per ogni x di N (ved. ad esempio [2] nota 7).

ogni sottogruppo di S è quasi–normale in G. Supponiamo che S non sia un fattore diretto di G. Esiste pertanto un elemento a di S ed un elemento h di G, d'ordine primo con p, per cui ah è diverso da ha. Detto F il gruppo unione dei due gruppi ciclici $\langle a \rangle$ ed $\langle h \rangle$, risulta F un gruppo a sottogruppi di Sylow ciclici ed $\langle a \rangle$ coincide con il derivato di F [3]. Quindi [3] $\langle a \rangle = \langle a^{-1} h^{-1} ah \rangle$, per cui a appartiene al gruppo $[S, G]$ generato da tutti i commutatori del tipo $b^{-1} g^{-1} bg$ con b elemento di S, g elemento di G. Sia poi c un elemento qualunque di S. Se $ch \neq hc$, per quanto visto c appartiene ad $[S, G]$. Se invece $ch = hc$, è $(ac)\, h \neq h\, (ac)$, per cui ac appartiene ad $[S, G]$; ma pure a sta in $[S, G]$: dunque $c = a^{-1}(ac)$ appartiene ad $[S, G]$. In conclusione ogni elemento c di S appartiene ad $[S, G]$, per cui $S = [S, G]$. Se $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$ è l'ordine di G, con $p_1 > p_2 > \cdots > p_t$, sia G_{p_i} il primo sottogruppo di Sylow di G relativo al numero primo p_i a partire da p_1 che non sia direttamente permutabile con ogni sottogruppo di Sylow di G. Se G non è speciale, un tale G_{p_i} certamente esiste, e si ha $G = T \times R$ ove T è di Hall e speciale d'ordine $p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}$, se non è identico. Indichiamo con $K_\infty(G)$ il più piccolo sottogruppo normale di G a fattoriale speciale: risulta $K_\infty(G) \subseteq R$, e dimostriamo che esso è di Hall e d'ordine dispari. Facciamo anzitutto vedere che G_{p_i} è contenuto in $K_\infty(G)$. Il gruppo $K_\infty(G)$ è l'intersezione dei termini $G^{(j)}$ della serie centrale discendente di G: $K_\infty(G) = \bigcap_j G^{(j)}$. È $G_{p_i} = [G, G_{p_i}] \subseteq [G, G] = G^{(1)}$ e da $G_{p_i} \subseteq G^{(j-1)}$ segue $G^{(j)} = [G^{(j-1)}, G] \supseteq [G_{p_i}, G] = G_{p_i}$; pertanto $G_{p_i} \subseteq \subseteq \bigcap_j G^{(j)} = K_\infty(G)$. Il gruppo G/G_{p_i} è un q–gruppo finito risolubile quindi per ipotesi induttiva possiamo supporre $K_\infty(G/G_{p_i})$ di Hall. Ma $G_{p_i} \subseteq K_\infty(G)$ per cui $K_\infty(G/G_{p_i}) = K_\infty(G)/G_{p_i}$. Dunque $K_\infty(G)$ è di Hall in G. Per di più di ordine dispari, essendo G supersolubile, per cui i 2–sottogruppi di Sylow di G hanno un complemento normale. Il gruppo $K_\infty(G)$ ha un complemento H che risulta un q–gruppo finito speciale. Ma allora $\mathfrak{L}(H) = \mathfrak{L}_c(H) = q(H)$, per cui (1.4) H è un gruppo modulare. Il gruppo $K_\infty(G)$ è contenuto nel derivato del gruppo supersolubile G, per cui è speciale, ed è un q–gruppo. Quindi ogni sottogruppo di $K_\infty(G)$ è quasi normale in G. Ne segue che H, o un qualsiasi coniugato di H normalizza ogni sottogruppo di $K_\infty(G)$. Se allora riusciamo a far vedere che l'unione di tutti i coniugati di H in G è G stesso, $K_\infty(G)$ risulta un gruppo Hamiltoniano d'ordine dispari e quindi abeliano. Sia P un sottogruppo di Sylow di $K_\infty(G)$. Il gruppo P non è direttamente permutabile con H, per cui esiste un a di P ed un h di H con $ah \neq ha$. Poiché $\langle a \rangle \cup \langle h \rangle = \langle a \rangle \langle h \rangle$, risulta $\langle h^{-1} a^{-1} ha \rangle = \langle a \rangle$ per cui $\langle h, a^{-1} ha \rangle = \langle a \rangle \cup \langle h \rangle$. Se poi c'è un elemento c di P con $ch = hc$, allora risulta $\langle h, (ac)^{-1} h\, (ac) \rangle = \langle ac, h \rangle$ e quindi $\langle a^{-1} ha, h, (ac)^{-1} h\, (ac) \rangle$ contiene c. Ne consegue che i coniugati di H in G generano un gruppo che contiene P. Si conclude che i coniugati di H in G generano G. E la 1.7 risulta completamente provata.

(3) Vedasi ad esempio [8] p. 175.

TEOREMA 1.8. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo finito* G *sia un gruppo risolubile con* $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$ *è che* G *contenga un sottogruppo normale* N *soddisfacente alle seguenti condizioni:*

a) N *è un sottogruppo di Hall di ordine dispari;*

b) G/N *è un gruppo speciale modulare;*

c) *gli automorfismi indotti in* N *dagli elementi di* G *lasciano fermi tutti i sottogruppi di* N.

Dimostrazione: La necessità della condizione segue dalla 1.7. Per la sufficienza, notiamo che la *a*) e *c*) implicano che N sia abeliano, e che ogni sottogruppo di N sia normale in G. G risulta dunque risolubile, e poiché N è normale e di Hall, esiste un complemento H di N in G. Sia ora Q un sottogruppo quasi–normale in G e T quasi–normale in Q. Il gruppo $P = T \cap N$ è normale in G, e sia diverso da 1. Il gruppo G/P soddisfa ancora alle condizioni *a*), *b*) *c*), quindi per induzione possiamo supporre T/P quasi–normale in G/P. Ma allora tale è T in G [1]. Sia ora $N \cap T = 1$. Da $G = NH$ con N di Hall e Q quasi–normale in G, segue $Q = (Q \cap N) \cup (Q \cap H)$ per ogni complemento H di N in G. T è quasi–normale in Q ed è quindi contenuto in ogni complemento di N. Ma tali complementi sono per la *b*) modulari e speciali: T è dunque quasi–normale in ogni complemento di N. Risulta $\langle g \rangle = \langle k \rangle \langle h \rangle = \langle k , h \rangle$. Ora $\langle g \rangle T = (\langle k \rangle \langle h \rangle) T = \langle k \rangle (\langle h \rangle T) = \langle k \rangle (T \langle h \rangle) = (T \langle k \rangle) \langle h \rangle = T \langle g \rangle$, e ciò perché $\langle k \rangle$ é normale in G e T è quasi–normale in ogni complemento di N. Dunque T è quasi–normale in G, e G è un q–gruppo. Ma allora per la 1.3 risulta $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$.

Corollario 1.9. Un sottogruppo di un q–gruppo finito risolubile, è un q–gruppo. L'ipotesi di risolubilità è evidentemente essenziale.

TEOREMA 1.10. *Un gruppo risolubile finito* G *con* $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$ *è un t–gruppo finito risolubile se e solo se i sottogruppi di Sylow di* G *sono abeliani o hamiltoniani.*

All'uopo basta tener conto del teorema 1.9 e di Satz 1 e 2 in [2].

Osservazione: Nell'enunciato del teorema 1.9 il sottogruppo N contiene il gruppo $K_\infty(G)$. È facile convincersi che N coincide con $K_\infty(G)$ se e solo se per ogni divisore primo p dell'ordine di N esiste un elemento g di G ed un intero $n \not\equiv 1 \mod \cdot p$ tale da aversi $g^{-1} x g = x^n$ qualunque sia l'elemento x nel p–sottogruppo di Sylow N_p di N.

2. Il teorema 1.9 con l'Osservazione ci permette, in analogia con il procedimento seguito da Gaschütz in [2] la costruzione di tutti i gruppi risolubili finiti G con $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$, a partire dai gruppi modulari speciali finiti. E precisamente abbiamo il

TEOREMA 2.1. *Sia* N *un gruppo abeliano finito, ed* H *un gruppo modulare speciale finito, con l'ordine di* N *primo con quello di* H, *e sia* Π_N *il gruppo degli automorfismi di* N *che mutano ogni sottogruppo di* N *in sè* (2) *(il gruppo delle potenze di* N). *Sia* ρ *un omomorfismo di* H *in* Π_N *tale che per ogni divisore primo* p *dell'ordine di* N *esista un elemento* h *di* N *per cui l'automorfismo* $\alpha = h^\rho$ *sia una potenza di* N *individuata dal numero naturale* n, *con* $n \not\equiv 1 \mod p$.

Indichiamo con G (N , H , ρ) *il gruppo costruito sulle coppie ordinate* (z, h) *con* z *in* N, h *in* H, *definendo il prodotto mediante la posizione*

$$(z_1, h_1)(z_2, h_2) = (z_1, z_2^{\alpha}, h_1, h_2) \qquad \text{ove} \quad \alpha = h^{\rho}.$$

Allora si ha:

a) G (N , H , ρ) *è un gruppo risolubile finito con* $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$; *il gruppo* K_∞ (G (N , H , ρ)) *è isomorfo ad* N *e* G (N , H , ρ)/K_∞ (G (N , H , ρ)) *è isomorfo ad* H;

b) *se* G *è un gruppo risolubile finito con* $\mathfrak{L}_c(G) = q(G)$, *posto* $H = G/K_\infty(G)$ *vi esiste un omomorfismo* ρ *di* H *in* Π_N, *con* N *gruppo isomorfo a* $K_\infty(G)$ *godente della proprietà enunciata sopra, e tale da aversi* G *isomorfo a* G (N , H , ρ);

c) *se* $G_1 = G(N_1, H_1, \rho_1)$ *e* $G_2 = G(N_2, H_2, \rho_2)$ *sono isomorfi, tali sono* N_1 *ed* N_2, H_1 *ed* H_2; G_1 *e* G_2 *sono isomorfi se e solo se esiste un automorfismo* χ *di* H_1 *per cui* $\rho_2 = \rho_1 \chi$.

Dimostrazione:

a) segue dal teorema 1.8 e dall'Osservazione a fine del n. 1;

b) il gruppo G è l'unione di $K_\infty(G)$ e di un complemento isomorfo ad H, in quanto $K_\infty(G)$ è un sottogruppo di Hall di G per la 1.7. L'esistenza dell'omomorfismo ρ è garantita dall'Osservazione; l'isomorfismo di G e G (N , H , ρ) trova la sua giustificazione nella teoria dell'ampliamento (4) e nelle proprietà enunciate in 1.9 insieme all'Osservazione;

c) essendo $K_\infty(G_i)$ isomorfo ad N_i, è N_1 isomorfo ad N_2, ed essendo $G_1/K_\infty(G_1)$ isomorfo a $G_2/K_\infty(G_2)$, tale è H_1 con H_2. L'ultima affermazione si ottiene tenendo conto del teorema 3,3 in [6] e del fatto che gli automorfismi di N_2 sono permutabili elemento per elemento con quelli di Π_{N_1}.

BIBLIOGRAFIA.

[1] DESKINS W. E., *On quasi-normal subgroups of finite groups*, «Math. Z.», *28*, 140–132 (1963).

[2] GASCHÜTZ W., *Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist*, « Jour. f.r.u.a. Math. », *198*, 87–92 (1957).

[3] HUPPERT B., *Gruppen mit modularer Syolw-Gruppe*, «Math. Z.», *75*, 140–153 (1961).

[4] ITÔ N. e SZÉP J., *Über die Quasi-normalteiler von endlichen Gruppen*, « Acta Sc. Math. », *23*, 168–170 (1962).

[5] ORE O., *Contribution to the theory of groups*, « Duke Math. J. », *5*, 431–460 (1939).

[6] TAUNT D. R., *Remarks on the isomorphism problem in theories of construction of finite groups*, « Proc. Cambr. Ph. Soc. », *51*, 16–24 (1955).

[7] WIELANDT H., *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*, «Math. Z.», *45*, 209–244 (1939).

[8] ZASSENHAUS H., *The theory of groups*, Second ed. Chelsea Publ. Comp. New-York (1958).

(4) Vedasi ad esempio [8] p. 124.