
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ROBERTO CONTI

Sul problema della controllabilità di un sistema lineare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.3-4, p. 146-149.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_3-4_146_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Teoria dei controlli. — *Sul problema della controllabilità di un sistema lineare.* Nota (*) di ROBERTO CONTI, presentata dal Socio G. SANSONE.

1. Sia dato un oggetto il cui stato, rappresentato da un n -vettore x , descrive nel tempo $t \geq 0$ una traiettoria dell'equazione differenziale

$$(1) \quad dx/dt = A(t)x + B(t)u(t) + c(t)$$

essendo $A(t)$ una matrice $n \times n$, $B(t)$ una matrice $n \times m$, $u(t)$ un m -vettore, $c(t)$ un n -vettore.

$A(t)$, $B(t)$, $c(t)$ sono assegnati, mentre $u(t)$, che rappresenta il controllo esercitato sull'oggetto, è indeterminato, essendo un qualunque elemento di un certo insieme $\mathcal{U}$ contenuto in uno spazio lineare $\mathcal{B}$ di m -vettori funzioni di t , in generale discontinui. Supponiamo, più precisamente che $A(t)$, $B(t)u(t)$ e $c(t)$ siano funzioni integrabili (secondo Lebesgue) in ogni intervallo $[0, T]$, $T > 0$.

Assegnato uno stato iniziale x^0 , per ogni $u \in \mathcal{U}$ indichiamo con $x(t; u)$ l'unica soluzione (secondo Carathéodory) della (1) soddisfacente

$$(2) \quad x(0; u) = x^0.$$

Assegnato anche uno stato finale x^1 si dirà che l'oggetto è controllabile in $\mathcal{U}$, rispetto alla coppia x^0, x^1 , ad un certo istante $T > 0$, se esistono un $T > 0$ ed un $u \in \mathcal{U}$, tali che la $x(t; u)$ soddisfi, oltre la (1) e la (2), anche la

$$(3) \quad x(T; u) = x^1.$$

Il problema della controllabilità consiste nello stabilire condizioni per l'esistenza di una tale coppia T, u , e nel determinare esplicitamente T ed u .

Nel quadro della teoria dei controlli (cfr. ad esempio: L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Interscience Publishers, 1962) la risoluzione di questo problema rappresenta il primo passo nella determinazione dei controlli « ottimi », vale a dire di quei controlli che, oltre a consentire all'oggetto un comportamento rappresentato da (1), (2), (3), rendono minimo un certo funzionale assegnato.

Il concetto di controllabilità rientra in quello di ϵ -controllabilità, dovuto ad H. A. Antosiewicz (*Linear control systems*, « Arch. Rat. Mech. Anal. », 12, 313-324 (1963)). Dato un $\epsilon \geq 0$, diremo che l'oggetto è ϵ -controllabile in $\mathcal{U}$ rispetto alla coppia x^0, x^1 , se esistono $T > 0$, $u \in \mathcal{U}$, tali che

$$\|x(T; u) - x^1\|_2 \leq \epsilon,$$

(*) Pervenuta all'accademia il 12 ottobre 1964.

dove $\| \cdot \|_2$ indica la norma nello spazio euclideo n -dimensionale E^n , cioè la distanza euclidea.

2. Supposto, com'è d'uso, che le soluzioni dell'equazione omogenea

$$(4) \quad dx/dt = A(t)x$$

siano note ⁽¹⁾, e indicando con $\Phi = \Phi(t)$ una qualunque matrice fondamentale di (4) ($d\Phi/dt = A(t)\Phi$, $\det \Phi \neq 0$), per ogni fissato $u \in \mathcal{M}$ avremo

$$x(t; u) = \Phi(t) \Phi^{-1}(0) x^0 + \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \\ + \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) c(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

Pertanto, posto

$$V(T, t) = \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t),$$

$$(5) \quad \chi(t) = x^1 - \Phi(t) \Phi^{-1}(0) x^0 - \int_0^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) c(\tau) d\tau,$$

il problema della controllabilità si riduce a determinare $T > 0$ in modo che le eventuali soluzioni u dell'equazione integrale di Fredholm

$$\int_0^T V(T, t) u(t) dt = \chi(T)$$

appartengano ad $\mathcal{M}$.

3. Facciamo dapprima le seguenti ipotesi H_1)– H_4):

H_1) $\mathcal{B}$ sia uno spazio di Banach e l'integrale di Lebesgue

$$\int_0^T V(T, t) u(t) dt$$

esista per ogni $u \in \mathcal{B}$;

H_2) la trasformazione lineare $\Lambda_T: \mathcal{B} \rightarrow E^n$, definita da

$$\Lambda_T: u \rightarrow \int_0^T V(T, t) u(t) dt$$

sia continua;

H_3) l'insieme $\mathcal{M}$ sia la sfera $\mathcal{M}_\rho: \|u\|_{\mathcal{B}} \leq \rho$, con $\rho > 0$ dato;

H_4) l'immagine $\Lambda_T \mathcal{M}_\rho$ di $\mathcal{M}_\rho$ rispetto a Λ_T sia un insieme chiuso di E^n .

(1) Da questa ipotesi prescinde, tuttavia, una recente ricerca di P. SANTORO (*Condizioni di non controllabilità per i sistemi lineari*) in corso di pubblicazione.

Detti $\mathfrak{B}^*$, $(E^n)^*$ gli spazi duali di $\mathfrak{B}$, E^n , si prova il ⁽²⁾

TEOR. 1. - *Nelle ipotesi H_1)– H_4), affinché si abbia ε -controllabilità ($\varepsilon \geq 0$) all'istante T in $\mathfrak{M}_0$, rispetto ad una coppia x^0, x^1 , è necessario e sufficiente che sia,*

$$(7) \quad |y^* \chi(T)| \leq \rho |y^* \Lambda_T|_{\mathfrak{B}^*} + \varepsilon \|y^*\|, \quad y^* \in (E^n)^*$$

dove $\chi(T)$ è definita dalla (6) per $t = T$, e con $\|y^*\| = |y^*|_{(E^n)^*} = \sup \{|y^* x| : \|x\|_2 \leq 1\}$.

4. Dalla (7) si deduce poi che la condizione

$$H_5): \quad \inf \{|y^* \Lambda_T|_{\mathfrak{B}^*} : \|y^*\|_{\mathfrak{B}^*} = 1\} > 0$$

equivalente a $\Lambda_T \mathfrak{B} = E^n$ è anche equivalente alla completa controllabilità in $\mathfrak{B}$ all'istante T , vale a dire alla controllabilità dell'oggetto in $\mathfrak{B}$ all'istante T rispetto a tutte le coppie x^0, x^1 .

Si prova inoltre:

TEOR. 2. - *Nelle ipotesi H_1)– H_5) il punto $\chi(T)$ è interno all'insieme $\Lambda_T \mathfrak{M}_0$, sulla frontiera $\partial \Lambda_T \mathfrak{M}_0$, o esterno a $\Lambda_T \mathfrak{M}_0$, secondo che*

$$\sup \{|y^* \chi(T)| : |y^* \Lambda_T|_{\mathfrak{B}^*} = 1\} <, =, > \rho,$$

ovvero secondo che

$$\sup \{|y^* \Lambda_T|_{\mathfrak{B}^*}^{-1} |y^* \chi(T)| : \|y^*\| = 1\} <, =, > \rho,$$

o, infine, secondo che

$$\inf \{|y^* \Lambda_T|_{\mathfrak{B}^*} : |y^* \chi(T)| = 1\} >, =, < \rho^{-1}.$$

TEOR. 3. - *Nelle ipotesi H_1)– H_5) si ha che l'immagine $\Lambda_T \mathfrak{M}_T$ di $\mathfrak{M}_0$ coincide con quella della frontiera $\partial \mathfrak{M}_0$, ossia $\Lambda_T \mathfrak{M}_0 = \Lambda_T \partial \mathfrak{M}_0$.*

5. Consideriamo adesso un particolare tipo di spazio $\mathfrak{B}$ che include, con gli spazi considerati da H. A. Antosiewicz (loc. cit.) e da W. T. Reid (*Ordinary linear differential operators of minimum norm*, «Duke Math. J.», 29, 591–606 (1962)), tutti quelli che più frequentemente ricorrono nella teoria dei controlli.

Dati p ed r : $1 < p \leq \infty$, $1 < r \leq \infty$, sia $\mathfrak{M}^{p,r}$ lo spazio degli m -vettori $u = u(t)$, $t \in [0, T]$, con norma definita da

$$|u|_{\mathfrak{M}^{p,r}} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_p^r dt \right)^{1/r}, & 1 < r < \infty, \\ \text{ess sup } \{\|u(t)\|_p : 0 \leq t \leq T\}, & r = \infty \end{cases}$$

(2) Le dimostrazioni di questo e degli altri risultati saranno date altrove.

con

$$\|u(t)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^m |u_j(t)|^p \right)^{1/p}, & 1 < p < \infty, \\ \max \{|u_j(t)| : j = 1, \dots, m\}, & p = \infty. \end{cases}$$

$\mathcal{M}^{p,r}$ è uno spazio di Banach, isomorfo ad $(\mathcal{M}^{q,s})^*$, con $q^{-1} = 1 - p^{-1}$, $s^{-1} = 1 - r^{-1}$, $1 \leq q < \infty$, $1 \leq s < \infty$.

In virtù della (5) e della continuità di $\Phi^{-1}(t)$ si vede che $H_1)$ ed $H_2)$ sono soddisfatte se si suppone che gli elementi della matrice $B(t)$ siano funzioni di potenza s -esima integrabile in $[0, T]$.

Inoltre, se si considera, in accordo con $H_3)$, la sfera

$$\mathcal{M}_0^{p,r}: \|u\|_{\mathcal{M}^{p,r}} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_p^r dt \right)^{1/r} \leq \rho$$

si può dimostrare che $\Lambda_T \mathcal{M}_0^{p,r}$ è un insieme chiuso di E^n (condizione $H_4)$).

Infine si trova

$$\|y^* \Lambda_T\|_{(\mathcal{M}^{p,r})^*} = \left(\int_0^T \|y^* V\|_q^s dt \right)^{1/s}$$

e con ciò la (7) diventa la disuguaglianza

$$\|y^* \chi(T)\| \leq \rho \left(\int_0^T \|y^* \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t)\|_q^s dt \right)^{1/s} + \varepsilon \|y^*\|, \quad y^* \in (E^n)^*$$

esprimente una condizione necessaria e sufficiente per la ε -controllabilità in $\mathcal{M}^{p,r}$.

La condizione per la controllabilità completa è espressa, conforme alla $H_5)$, da

$$\inf \left\{ \left(\int_0^T \|y^* \Phi(T) \Phi^{-1}(t) B(t)\|_q^s dt \right)^{1/s} : \|y^*\| = 1 \right\} > 0.$$

Questa condizione consente inoltre l'effettiva determinazione dei controlli soddisfacenti (1), (2), (3), in $\mathcal{M}_0^{p,r}$ se $1 < p < \infty$, $1 < r < \infty$, mentre va sostituita da un'ipotesi più restrittiva se $1 < p < \infty$, ma $r = \infty$, e con un'altra, ancora più restrittiva (nota come condizione di normalità nel caso $p = r = \infty$) se $p = \infty$, $1 < r \leq \infty$.