Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

E. Rofman

Osservazioni sulla convergenza di un metodo d'integrazione per punti di equazioni differenziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.3-4, p. 141–145.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_3-4_141_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Analisi numerica. — *Osservazioni sulla convergenza di un metodo d'integrazione per punti di equazioni differenziali.* Nota [*] di EDMUNDO ROFMAN, presentata dal Socio G. KRALL.

1. Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x, continua insieme con le sue derivate fino a quella di ordine n, nell'intervallo chiuso $[a, b]$, ossia $f(x) \in C^n$ per $a \leq x \leq b$.

Denotiamo con $P_{n-1}(x)$ il polinomio di grado $n-1$ che soddisfa le condizioni $P_{n-1}(a_i) = f(a_i)$, $(a_1 < a_2 < \cdots < a_n \,;\, a_i \in [a, b])$.

È noto che, per ogni $x \in [a, b]$, il termine complementare $\Delta_n(x)$ della formula di interpolazione di Lagrange ha l'espressione

$$\Delta_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \,, \qquad a < \xi < b .$$

Se $f(x)$ fosse di classe C^∞ ed esistesse un numero positivo R tale che $|f^{(n)}(x)| < R^n$ per $a \leq x \leq b$ e per qualunque n, oltre alla uniforme convergenza in $[a, b]$ dei polinomi interpolatori verso la $f(x)$, si avrebbe la convergenza, pure uniforme in $[a, b]$, delle successioni delle derivate di $P_{n-1}(x)$ verso le corrispondenti derivate di $f(x)$. Questo risultato [1] è indipendente dalla distribuzione dei punti a_i.

2. Poiché ci proponiamo di studiare la convergenza del metodo in casi nei quali non esiste un numero R, che fornisca la predetta limitazione per le derivate di $f(x)$, conviene premettere una breve analisi della funzione

$$V_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - a_i) . \tag{1}$$

Nei punti a_j risulta

$$V'_n(a_j) = \prod_{i=1}^{n}{}^{(j)} (a_j - a_i) \,, \tag{2}$$

$$V''_n(a_j) = 2 \sum_{h=1}^{n}{}^{(j)} \prod_{i=1}^{n}{}^{(j,h)} (a_j - a_i) \,, \tag{3}$$

dove i simboli $\sum\limits_{h=1}^{n}{}^{(j)}$, $\prod\limits_{i=1}^{n}{}^{(j)}$, $\prod\limits_{i=1}^{n}{}^{(j,h)}$ indicano la somma o i prodotti eseguiti per tutti i valori degli indici tra 1 ed n tranne quelli indicati tra parentesi.

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1964.

(1) La dimostrazione si fa con riferimento ai polinomi interpolatori di Hermite, dei quali quelli di Lagrange sono un caso particolare.

3. *a*) Supponiamo che la distribuzione dei punti a_i sia fatta secondo la legge

$$a_i = \frac{il}{n+1} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4}$$

dove $l = b - a$ ed $a = 0$. Con il cambiamento di variabile $z = xl$ segue dalla (1):

$$\mathrm{U}_n(x) = l^n \prod_{i=1}^{n} \left(x - \frac{i}{n+1}\right), \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

e si può enunciare il

TEOREMA I. – *Il massimo assoluto di* $|\mathrm{U}_n(x)|$ *per* $0 \leq x \leq 1$ *si trova negli estremi dell'intervallo e, precisamente, è*

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\mathrm{U}_n(x)| = l^n \frac{n!}{(n+1)^n}. \tag{6}$$

Dimostrazione. – Negli intervalli chiusi $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ e $\left[\frac{n}{n+1}, 1\right]$ la $\mathrm{U}'_n(x)$ non cambia segno, perciò la $\mathrm{U}_n(x)$ è ivi monotona e si ha

$$\max_{0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}} |\mathrm{U}_n(x)| = \max_{\frac{n}{n+1} \leq x \leq 1} |\mathrm{U}_n(x)| = |\mathrm{U}_n(0)| = |\mathrm{U}_n(1)| = l^n \frac{n!}{(n+1)^n}. \tag{6'}$$

Invece la $\mathrm{U}'_x(x)$ ammette uno zero interno ad ogni intervallo $\left[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}\right]$, con $i = 1, 2, \cdots, n-1$; d'altra parte $\mathrm{U}''_n(x)$ ha, al più, un solo zero in ciascuno dei suddetti intervalli (2), come si dimostra sfruttando la (3) e osservando i successivi cambiamenti di segno della $\mathrm{U}''_n(a_j)$ quando si passa da $j = i$ ad $j = i + 1$.

Si può, pertanto, maggiorare in ognuno di tali intervalli il valore assoluto della funzione con il prodotto della ampiezza dell'intervallo per il maggiore dei due valori che assume $\mathrm{U}'_n(x)$ agli estremi dello stesso.

Essendo, per (2):

$$\max_{j=1,2,\cdots,n} \left|\mathrm{U}'_n\left(\frac{j}{n+1}\right)\right| = \frac{(n-1)!}{(n+1)^{n-1}} l^n$$

risulta, per $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{n}{n+1}$,

$$|\mathrm{U}_n(x)| < \frac{(n-1)!}{(n+1)^n} l^n$$

e, tenendo conto di (6'), segue la tesi.

TEOREMA II. – *Se* $l < e\ (l \geq e)$, $\mathrm{U}_n(x)$ *converge uniformemente (non converge uniformemente) per* $n \to \infty$ *verso zero, nell'intervallo* $[0, 1]$.

(2) Cfr. U. RICHARD, *Proprietà asintotiche e determinazione numerica, ecc.*, in «Atti Acc. Sci. Torino», vol. 96, Tomo 1 (1961–62) p. 700.

Dimostrazione. – Dalla (6) si deduce

$$|U_n(x)| \leq \frac{n!}{(n+1)^n} l^n , \qquad 0 \leq x \leq 1$$

ed, essendo asintoticamente

$$\frac{n!}{(n+1)^n} l^n \sim \sqrt{n} \left(\frac{l}{e}\right)^n$$

segue la tesi.

b) Con analogo ragionamento si può studiare il caso in cui la legge di distribuzione dei punti sia

$$(7) \qquad a_i = \frac{il}{n-1} \quad \text{per} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n-1 ; \qquad n \geq 2$$

concludendosi in questo caso che $V_n(x) = l^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(x - \frac{i}{n-1}\right)$ converge uniformemente in $[0, 1]$, per $n \to \infty$, verso zero purché $l \leq e$, e non converge uniformemente se $l > e$.

c) Si osservi, inoltre, che tutti i risultati conseguiti in $[0, l]$ sussistono, tramite una traslazione, in $[a, b]$ con $b - a = l$.

4. Riprendendo lo studio della convergenza della successione dei polinomi interpolatori di Lagrange di una $f(x) \in C^\infty$ per $a \leq x \leq b$, ed adoperando una qualsiasi delle due leggi di distribuzione dei punti a_i, alle quali ci siamo riferiti, si potrà concludere che: *Ci sarà convergenza uniforme dei polinomi interpolatori verso quelle funzioni le cui derivate considerate in* $[a, b]$ *verifichino la limitazione*

$$(8) \qquad |f^{(n)}(x)| < H_n$$

con H_n *tale che*

$$(9) \qquad \lim_{n \to \infty} H_n \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{l}{e}\right)^n = 0 .$$

Inoltre, sarà possibile sfruttare questa condizione per determinare i valori di l per i quali essa è soddisfatta.

Se i polinomi interpolatori non sono del grado minimo richiesto per l'interpolazione, sussiste il seguente

LEMMA. – *Si consideri una successione di polinomi*

$$(10) \qquad \{P_{n+r}(x) = c_{n,0} x^{n+r} + c_{n,1} x^{n+r-1} + \cdots + c_{n,n+r}\}$$

con r fissato; $n = 1, 2, 3, \cdots$) *soddisfacenti le condizioni, per* $i = 1, 2, \cdots, n+1$:

$$(11) \qquad P_{n+r}(a_i) = f(a_i) ; \qquad \left(a_i = a + \frac{il}{n+2} \quad \text{o} \quad a_i = a + \frac{(i-1)}{n} l\right) .$$

In questo caso il termine complementare $\Delta_n(x) = f(x) - P_{n+r}(x)$ *si annulla negli* $n+1$ *punti* a_i, *e perciò* [3]

$$\Delta_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+r)!}{(r-1)!} c_{n,0}\, \xi^{r-1} - \frac{(n+r-1)!}{(r-2)!} c_{n,1}\, \xi^{r-2} - \cdots - (n+1)!\, c_{n,r-1}}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i).$$

Segue

$$(12) \qquad |\Delta_n(x)| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i) \right| + \sum_{j=0}^{r-1} |c_{n,j}\, p_{r-j-1}(n)\, \xi^{r-j-1}| \cdot \prod_{i=1}^{n+1} (x - a_i)$$

dove $p_{r-j-1}(n)$ *è un polinomio in* n *di grado* $r - j - 1$ $(p_0(n) = 1)$.

Se si suppone la (9) *soddisfatta per* $0 \leq l < \bar{l}$ *con* $\bar{l} \leq b - a$, *e risultano*

$$(13) \qquad \lim_{n \to \infty} c_{n,j}\, n^{r-j-1} \sqrt{n} \left(\frac{l}{e}\right)^n = 0 \qquad \text{per } 0 \leq l \leq l_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, r-1$$

si può concludere che $P_{n+r}(x)$ *converge uniformemente, per* $n \to \infty$, *verso* $f(x)$ *purché* $0 \leq l \leq L$, *con*

$$(14) \qquad L = \min(\bar{l}, l_j).$$

In particolare, se i $c_{n,k}$, $(k = 0, 1, 2, \cdots, r-1)$ *sono costanti, si ha convergenza negli intervalli di ampiezza* l, *con* $l < \min(\bar{l}, e)$

5. Applicazione dei polinomi interpolatori alla risoluzione approssimata delle equazioni differenziali. – *a*) Sia data una equazione differenziale lineare ordinaria di ordine s, non omogenea,

$$(15) \qquad \mathfrak{L}[y] = f(x).$$

Si tratta di calcolare una soluzione particolare della (15) che nell'intervallo (a, b) soddisfi ad essa e verifichi s condizioni assegnate agli estremi dell'intervallo.

Supponiamo che la soluzione cercata si possa porre nella seguente forma

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

con $G(x, \xi)$ continua in (a, b).

Come funzioni approssimanti della soluzione utilizzeremo *polinomi di grado* $n + s$

$$y_{n+s}(x) = \sum_{h=0}^{n} C_h\, \varphi_h(x),$$

che soddisfino le condizioni agli estremi [4].

(3) Cfr. B. Levi, *Analisi Matematica*, pp. 334–335 (Bologna, Zanichelli, 1937).

(4) Se $s = 2$ e le condizioni sono $y(a) = y(b) = 0$ si avrà ad esempio

$$y_{n+2}(x) = (x - a)(x - b) \sum_{h=0}^{n} C_h\, x^{n-h} = \sum_{h=0}^{n} C_h\, \varphi_h(x).$$

Per determinare i coefficienti C_h [5] si applichi l'operatore $\mathfrak{L}$ alla soluzione proposta

$$\mathfrak{L}[y_{n+s}(x)] = \mathfrak{L}\left[\sum_{h=0}^{n} C_h \varphi_h(x)\right] = \sum_{h=0}^{n} C_h \mathfrak{L}[\varphi_h(x)] = \sum_{h=0}^{n} C_h \psi_h(x).$$

Fissati $n+1$ punti a_i distribuiti secondo la legge $a_i = a + \frac{i(b-a)}{n+2}$ con $i = 1, 2, \cdots, n+1$, si ricavano i valori dei C_h dal sistema

$$\sum_{h=0}^{n} C_h \psi_h(a_i) = f(a_i) \qquad i = 1, 2, \cdots, n+1 \tag{16}$$

avente soluzione unica se si suppone

$$\det((\psi_h(a_i))) \neq 0 \qquad \begin{cases} h = 0, 1, \cdots n; \\ i = 1, 2, \cdots, n+1. \end{cases}$$

Ottenuti i C_h, risulta

$$\sum_{h=0}^{n} C_h \psi_h(x) = \Phi_{n+s}(x) \tag{17}$$

potendosi la $y_{n+s}(x)$ esprimere come

$$y_{n+s}(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \Phi_{n+s}(\xi)\, d\xi. \tag{18}$$

Se i coefficienti $p_k(x)$ della equazione differenziale sono polinomi di grado g_k, indicando con m il $\max\limits_{k=0,1,\cdots,s}(g_k + k - s)$, il polinomio $\Phi_{n+s}(x)$, definito da (17), risulta un polinomio di grado $\leq n + s + m$ che [grazie alle (16)], assume gli stessi valori di $f(x)$ negli $n+1$ punti a_i.

Disponiamo, perciò, di un polinomio del tipo (10), verificante le (11); se si soddisfano le condizioni (9) e (13) enunciate nel Lemma del n. 4 e si indica, come in (14), con L l'intervallo dove risulta la convergenza uniforme di $\Phi_{n+s}(x)$ verso $f(x)$, si avrà, per (18), la convergenza di $y_{n+s}(x)$ verso $y(x)$.

b) È utile segnalare la possibilità d'impostare il calcolo senza che i polinomi soddisfino a priori le condizioni agli estremi. In tal caso occorre naturalmente considerare le equazioni esprimenti tali condizioni in $x = a$ ed $x = b$.

c) Infine, se i coefficienti dell'equazione differenziale sono funzioni arbitrarie $A_k(x)$, (tali però che per $l = b - a$ si verifichi la (9)) il procedimento esposto fornisce, per ogni valore di n, una $y_{n+s}(x)$ che corrisponde alla soluzione approssimata che si sarebbe ottenuta considerando un'altra equazione differenziale nella quale i coefficienti di partenza siano stati sostituiti con polinomi che assumono gli stessi valori delle $A_k(x)$ nei punti a_i. La possibilità di considerare $y_{n+s}(x)$ come una utile approssimazione dell'equazione proposta resta legata all'analisi della stabilità della soluzione rispetto alla variazione dei coefficienti.

(5) Cfr. L. COLLATZ, *The numerical treatment of differential equations*, p. 29 (Berlino, Springer-Verlag, 1960).