
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MICHELE DE FRANCHIS

**La più generale funzione d'invarianza per criteri
sufficienti di minimo con condizioni di Dirichlet per
integrali pluridimensionali del primo ordine
dipendenti da un vettore a più componenti**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.3-4, p.
129-140.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_3-4_129_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_3-4_129_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi Matematica. — *La più generale funzione d'invarianza per criteri sufficienti di minimo con condizioni di Dirichlet per integrali pluridimensionali del primo ordine dipendenti da un vettore a più componenti* (*). Nota di MICHELE DE FRANCHIS, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

POSIZIONE DEL PROBLEMA. — Designino:

D un dominio regolare dello spazio cartesiano reale X ad r dimensioni di cui si indicherà con $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r)$ il punto generico;

$\mathfrak{F}D$ la frontiera di D ;

Y lo spazio cartesiano reale ad n dimensioni, il cui punto generico si indicherà con $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$;

P lo spazio cartesiano reale ad $n \cdot r$ dimensioni, di punto generico p , di cui indicheremo con p_{ih} la $[(i-1)r + h]$ -esima coordinata.

Assegnamo ad arbitrio un vettore $y^o(x)$ ad n componenti reali:

$$y_1^o(x), y_2^o(x), \dots, y_n^o(x)$$

funzioni di x definite in D ed ivi continue con le derivate parziali prime ossia, come brevemente diremo, la funzione (vettoriale) $y^o(x)$ di classe $C^1(D)$; sia $E^{(1)}(y^o, D)$ la totalità delle funzioni vettoriali $y(x)$ ad n componenti reali:

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

di classe $C^1(D)$ e tali che su $\mathfrak{F}D$ siano soddisfatte le

$$y_i(x) = y_i^o(x) \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

che diremo condizioni di Dirichlet, chiamando, secondo una locuzione usata dal prof. Picone, l'insieme $E^{(1)}(y^o, D)$ (come ogni totalità di funzioni di una data classe soddisfacenti a condizioni di Dirichlet) insieme di Dirichlet (1).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 21.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1964.

(1) Per la nomenclatura usata in questa parte cfr. M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di Calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualsivoglia nel vettore minimante a più componenti*, «Atti Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie», ser. VIII, vol. VII (1963), pp. 33-58, da p. 33 a 44.

Indicheremo con $\partial y_i / \partial x_h$ la derivata parziale prima di $y_i(x)$ rispetto ad x_h e con $y'(x)$ il vettore ad $n \cdot r$ componenti avente $\partial y_i / \partial x_h$ come $[(i-1)r + h]$ -esima componente.

Consideriamo in $E^{(1)}(y^0, D)$ il funzionale

$$I_f(y) = \int_D f[x, y(x), y'(x)] dx,$$

che intendiamo definito per ogni funzione $f(x, y, p)$ continua in $D \times Y \times P$ insieme con le derivate parziali prime rispetto alle x_h, y_i e p_{ih} , nonché con le derivate parziali delle $f_{p_{ih}}$ rispetto alle x_h, y_j e p_{jk} ($i, j = 1, \dots, n$; $h, k = 1, \dots, r$); conveniamo di indicare con $f_{x_h}, f_{y_i}, f_{p_{ih}}, f_{p_{ih}x_h}, f_{p_{ih}y_j}, f_{p_{ih}p_{jk}}$, rispettivamente, le derivate testè citate e riserviamo il simbolo $\partial f / \partial x_h$ ad indicare la derivata della funzione (di x) $f[x, y(x), y'(x)]$ rispetto ad x_h .

Ci proponiamo di indicare una caratterizzazione delle funzioni $v(x, y, p)$ fra le f introdotte nel funzionale $I_f(y)$ tali che sia costante in $E^{(1)}(y^0, D)$ il funzionale

$$(I) \quad I_v(y) = \int_D v[x, y(x), y'(x)] dx,$$

cioè di quelle funzioni che il prof. Picone ha considerato relativamente anche ai più generali problemi di Calcolo delle variazioni da lui trattati, in suoi recenti lavori, attribuendo loro la denominazione di *funzioni di invarianza* ⁽²⁾; negli stessi lavori sono, altresì, indicate molteplici possibili utilizzazioni delle dette funzioni, oltre che per il conseguimento di efficaci criteri sufficienti di minimo, per la risoluzione di problemi connessi ad alcuni tipi di equazioni funzionali, tra le quali di particolare rilievo quelle che interessano i problemi della Fisica matematica, quali il problema dell'elasticità.

Secondo la nomenclatura usata dal prof. Picone, il classico problema di minimo associato al funzionale $I_f(y)$ in $E^{(1)}(y^0, D)$ è il problema di Dirichlet relativo ad un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante a più componenti.

Restringendo la classe di variabilità di $y(x)$ all'insieme di Dirichlet $E^{(2)}(\bar{y}, D)$ delle funzioni $y(x)$ di classe $C^2(D)$ coincidenti su $\bar{D}$ con la traccia della funzione $\bar{y}(x) \in C^2(D)$, vale la caratterizzazione delle funzioni d'invarianza per il problema da noi trattato data, come caso particolare di un criterio più generale, dal prof. Picone, per cui condizione sufficiente, oltre che

(2) Cfr. M. PICONE, a) *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Atti della Accademia Naz. dei Lincei, Memorie», ser. VIII, vol. VI (1962), pp. 281-337.

b) *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale, del primo ordine nel vettore minimante in parte o completamente libero alla frontiera del dominio d'integrazione*, «Atti della Accademia Naz. dei Lincei, Memorie», ser. VIII, vol. VI (1962) pp. 341-374.

c) loc cit. (1).

necessaria, perché una funzione $f(x, y, p)$ soddisfacente alle condizioni di regolarità introdotte nel definire il funzionale $I_f(y)$ sia funzione d'invarianza in $E^{(2)}(\bar{y}, D)$, è che sia identicamente soddisfatto in D , qualunque sia la funzione $y(x)$ in $E^{(2)}(\bar{y}, D)$, il sistema di Eulero-Lagrange che, introducendo la convenzione, che manterremo in seguito, di sottintendere una sommazione su ogni indice ripetuto due volte in uno stesso monomio, si scrive:

$$(2) \quad f_{y_i}[x, y(x), y'(x)] - \frac{\partial}{\partial x_h} f_{p_{ih}}[x, y(x), y'(x)] = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, n \\ h = 1, \dots, r. \end{matrix}$$

È immediato constatare che perché il sistema (2) sia soddisfatto in D da ogni $y(x)$ in $E^{(2)}(\bar{y}, D)$ deve aversi identicamente in $D \times Y \times P$:

$$f_{p_{ih} p_{jk}}(x, y, p) + f_{p_{ik} p_{jh}}(x, y, p) = 0.$$

Questa condizione che, dunque, è necessaria affinché una funzione sia di invarianza in $E^{(2)}(\bar{y}, D)$ è pure necessaria affinché una funzione sia di invarianza in $E^{(1)}(y^0, D)$, come subito si constata se si osserva che una funzione d'invarianza in $E^{(1)}(y^0, D)$ $[v y^0]$ è anche d'invarianza in $E^{(2)}(\bar{y}, D)$.

Grazie a decisivi suggerimenti del prof. Fichera, tenendo conto della forma che deve avere la funzione $v(x, y, p)$ in $D \times Y \times P$ affinché sia funzione d'invarianza in $E^{(1)}(y^0, D)$, in relazione alle condizioni necessarie:

$$(3) \quad v_{p_{ih} p_{jk}}(x, y, p) + v_{p_{ik} p_{jh}}(x, y, p) = 0 \quad \begin{matrix} i, j = 1, \dots, n \\ h, k = 1, \dots, r \end{matrix}$$

(identicamente in $D \times Y \times P$), ho espresso il funzionale $I_v(y)$ come l'integrale di una forma esterna, pervenendo ad una nuova caratterizzazione delle funzioni d'invarianza in $E^{(1)}(y^0, D)$, che mi pare utile in quanto consente di scrivere esplicitamente la più generale funzione d'invarianza per n ed r qualsivogliano ⁽⁴⁾. Ho ritenuto opportuno applicare la trovata caratterizzazione per scrivere la più generale funzione d'invarianza per $n = r = 3$ in $E^{(1)}(y^0, D)$

(3) Cfr. M. PICONE, loc. cit. ⁽¹⁾ teor. IX, p. 45. Si noti che sulle funzioni $y(x)$ non è posta dal prof. Picone l'ipotesi che siano di classe due; è invece supposto che siano di classe uno e che ogni funzione $y(x)$ dell'insieme di Dirichlet che si considera sia *regolare* rispetto alla funzione $f(x, y, p)$, cioè che esistano e siano continue in D tutte le derivate $\frac{\partial}{\partial x_h} f[x, y(x), y'(x)]$. Il criterio in questione è però applicato al conseguimento della funzione di invarianza nelle condizioni da me, per semplicità di esposizione, più sopra considerate.

(4) Il risultato cui pervengo coincide, salve le condizioni di regolarità legate ai procedimenti, con quelli ottenuti dal prof. Picone, il quale aveva già trovato la più generale funzione d'invarianza per n ed r tali che $(n-1)(r-1) \leq 1$ (per un quadro dei risultati cfr. M. PICONE, loc. cit. ⁽¹⁾ pp. 46-48). Si noti che per $n = r = 2$ l'insieme di Dirichlet considerato dal prof. Picone è quello $E^{(2)}(\bar{y}, D)$. Il pervenire agli stessi risultati fa subito pensare che l'indice k (≥ 1) della classe $E^{(k)}(\bar{y}, D)$ non influenzi la generalità della funzione d'invarianza. Tale osservazione può essere confermata, oltre che con considerazioni di natura diversa, constatando che le caratterizzazioni cui si perviene non sono modificate dall'aumentare l'indice k della classe $E^{(k)}(\bar{y}, D)$.

per l'interesse che il suo possesso può avere nella risoluzione dei problemi della Fisica matematica affrontati dal prof. Picone col metodo delle funzioni d'invarianza e, in particolare, per la limitazione delle frequenze delle vibrazioni proprie di un corpo elastico isotropo e omogeneo a contorno fisso, problemi dei quali è mio intendimento di occuparmi prossimamente.

1. Le funzioni $v(x, y, p)$ d'invarianza in D per l'insieme $E^{(1)}(y^0, D)$, soddisfacenti alle condizioni di regolarità che abbiamo fissato per $f(x, y, p)$ nel definire il funzionale $I_f(y)$, vanno ricercate, in base alle richiamate condizioni necessarie (3), fra le funzioni che soddisfano identicamente in $D \times Y \times P$ al sistema

$$(3') \quad v_{p_{ih} p_{jh}}(x, y, p) + v_{p_{jh} p_{ih}}(x, y, p) = 0 \quad \begin{matrix} i \leq j & i, j = 1, \dots, n \\ h \leq k & h, k = 1, \dots, r, \end{matrix}$$

potendosi prescindere dal considerare i casi $i > j$ e $h > k$ senza che si tralasci alcuna equazione del sistema (3) data l'invertibilità, nelle nostre ipotesi, dell'ordine delle derivazioni che operano sulla v in (3).

Prendiamo prima in considerazione quelle equazioni del sistema (3') che corrispondono ai casi in cui una almeno delle due coppie i, j e h, k sia di indici uguali.

Esse indicano che $v(x, y, p)$ deve essere un polinomio nelle p_{ih} tale che in uno stesso monomio non compaiono due indeterminate con uguali i primi o i secondi indici e quindi, in particolare, un polinomio di grado al più $v = \min(r, n)$ nel complesso delle p_{ih} ; i coefficienti, perché si stia nell'ambito delle funzioni v che ci interessa di considerare, sono funzioni di (x, y) continue con le derivate parziali prime rispetto alle x_h ed y_i . Talché deve essere intanto

$$(4) \quad v(x, y, p) = \sum_{\mu}^v \sum_{s_1 < \dots < s_{\mu}}^{1, n} \sum_{l_1 \dots l_{\mu}}^{1, r} A_{l_1 \dots l_{\mu}}^{s_1 \dots s_{\mu}}(x, y) p_{s_1 l_1} \dots p_{s_{\mu} l_{\mu}} \quad (5)$$

intendendo con $\sum_{s_1 < \dots < s_{\mu}}^{1, n}$ di sommare a tutte le possibili combinazioni di classe μ

degli indici $1, \dots, r$ nell'ordine crescente e con $\sum_{l_1 \dots l_{\mu}}^{1, r}$ di sommare a tutte le possibili disposizioni semplici di classe μ di $1, \dots, r$.

Per trovare l'espressione della funzione $v(x, y, p)$ che soddisfi a tutte le equazioni del sistema (3') basterà sostituire, nelle equazioni del sistema corrispondenti ad $i < j$ e $h < k$, alla v la sua espressione (4) per dedurne le condizioni cui il polinomio (4) deve ulteriormente soddisfare. Così facendo, si ottiene al primo membro di ciascuna equazione del sistema (3') un polinomio in cui non compaiono i coefficienti dei termini di (4) di grado minore di due nel complesso delle p_{ih} , e il cui annullarsi identico in $D \times Y \times P$ equi-

(5) Pur conservando in generale la convenzione sommatoria introdotta userò il segno Σ quando convenga precisare la variabilità degli indici.

vale, in forza del principio d'identità dei polinomi, al verificarsi in $D \times Y$ delle identità:

$$A_{l_1 \dots l_\alpha \dots l_3 \dots l_\mu}^{s_1 \dots s_\alpha \dots s_3 \dots s_\mu}(x, y) + A_{l_1 \dots l_3 \dots l_\alpha \dots l_\mu}^{s_1 \dots s_\alpha \dots s_3 \dots s_\mu}(x, y) = 0 \quad (\mu \geq 2).$$

Queste condizioni – che si interpretano come condizioni di antisimmetria dei coefficienti dei termini di grado maggiore o uguale a due rispetto agli indici in basso – consentono di esprimere tutti i coefficienti di (4) in funzione di quelli $A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y)$ con $h_1 < \dots < h_\mu$, ($s_1 < \dots < s_\mu$) secondo le relazioni

$$(5) \quad A_{l_1 \dots l_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) = \delta_{h_1 \dots h_\mu}^{l_1 \dots l_\mu} A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y)$$

indicando $\delta_{h_1 \dots h_\mu}^{l_1 \dots l_\mu}$ il simbolo di Kronecker, cioè il numero 0 se $l_1 \dots l_\mu$ contiene qualche indice diverso da quelli contenuti in $h_1 \dots h_\mu$ e altrimenti il numero ± 1 secondo che $l_1 \dots l_\mu$ sia una permutazione di classe pari o di classe dispari di $h_1 \dots h_\mu$.

Osservato che se v è del tipo (4), nell'ipotesi che i coefficienti soddisfino alle (5), sono verificate le (3), concludiamo che le condizioni (3), necessarie affinché la v sia una funzione di invarianza, equivalgono ad imporre a v di essere del tipo

$$(6) \quad v(x, y, p) = \sum_0^v \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{\substack{l_1 \dots l_\mu \\ (h_1 < \dots < h_\mu)}}^{I, r} A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) \delta_{h_1 \dots h_\mu}^{l_1 \dots l_\mu} p_{s_1 l_1} \dots p_{s_\mu l_\mu}$$

con i coefficienti $A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y)$ funzioni di classe $C^1(D \times Y)$.

Siamo dunque ricondotti a ricercare le funzioni d'invarianza fra le v esprimibili mediante la (6); in altri termini, si tratterà di ricercare le condizioni da imporre ai coefficienti del polinomio (6) affinché il funzionale

$$(7) \quad I_v(y) = \int_D \sum_0^v \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{\substack{l_1 \dots l_\mu \\ (h_1 < \dots < h_\mu)}}^{I, r} A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}[x, y(x)] \delta_{h_1 \dots h_\mu}^{l_1 \dots l_\mu} \frac{\partial y_{s_1}}{\partial x_{l_1}} \dots \frac{\partial y_{s_\mu}}{\partial x_{l_\mu}} dx_1 \dots dx_r$$

sia costante in $E^{(1)}(y^0, D)$.

Osserviamo che $\delta_{h_1 \dots h_\mu}^{l_1 \dots l_\mu} \frac{\partial y_{s_1}}{\partial x_{l_1}} \dots \frac{\partial y_{s_\mu}}{\partial x_{l_\mu}}$ non è altro che lo sviluppo del determinante jacobiano di $y_{s_1}(x), \dots, y_{s_\mu}(x)$ rispetto ad $x_{h_1}, \dots, x_{h_\mu}$, determinante che indicheremo con $\frac{\partial(y_{s_1}, \dots, y_{s_\mu})}{\partial(x_{h_1}, \dots, x_{h_\mu})}$; inoltre, se $h_{\mu+1} \dots h_r$ è la permutazione dei numeri, disposti in ordine crescente, che restano da $1, \dots, r$ ove si tolgano $h_1 \dots h_\mu$ (talché $h_1 \dots h_\mu h_{\mu+1} \dots h_r$ è una permutazione di $1, \dots, r$ individuata dal fissare $h_1 \dots h_\mu$), si ha

$$\frac{\partial(y_{s_1}, \dots, y_{s_\mu})}{\partial(x_{h_1}, \dots, x_{h_\mu})} = \frac{\partial(y_{s_1}, \dots, y_{s_\mu}, x_{h_{\mu+1}}, \dots, x_{h_r})}{\partial(x_{h_1}, \dots, x_{h_\mu}, x_{h_{\mu+1}}, \dots, x_{h_r})} = \delta_{1 \dots r}^{h_1 \dots h_r} \frac{\partial(y_{s_1}, \dots, y_{s_\mu}, x_{h_{\mu+1}}, \dots, x_{h_r})}{\partial(x_1, \dots, x_\mu, x_{\mu+1}, \dots, x_r)}.$$

Si conclude che la (7) può scriversi:

$$I_v(y) = \int_D \sum_{\mu}^v \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{h_1 < \dots < h_\mu}^{I, r} A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu} [x, y(x)] \delta_{I \dots r}^{h_1 \dots h_r} \cdot \frac{\partial (y_{s_1}, \dots, y_{s_\mu}, x_{h_{\mu+1}}, \dots, x_{h_r})}{\partial (x_I, \dots, x_r)} dx_I \dots dx_r.$$

Posto

$$\alpha_{h_{\mu+1} \dots h_r}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) = \delta_{I \dots r}^{h_1 \dots h_r} A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y)$$

si ha, quindi:

$$(8) \quad I_v(y) = \int_D \sum_{\mu}^v \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{h_{\mu+1} < \dots < h_r}^{I, r} \alpha_{h_{\mu+1} \dots h_r}^{s_1 \dots s_\mu} [x, y(x)] \cdot \frac{\partial (y_{s_1}, \dots, y_{s_\mu}, x_{h_{\mu+1}}, \dots, x_{h_r})}{\partial (x_I, \dots, x_r)} dx_I \dots dx_r.$$

Ora, essendo D un dominio regolare, per ogni $y(x) \in E^{(1)}(y^0, D)$ la varietà V di equazioni

$$\begin{cases} x_k = x_k \\ y_i = y_i(x) \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r)$$

è una varietà regolare aperta ad r dimensioni di dominio base D ⁽⁶⁾; onde l'integrale (8) è l'integrale esteso alla varietà V della forma esterna di grado r (o r -forma) nelle $n + r$ variabili y_i e x_k

$$(9) \quad \alpha \equiv \sum_{\mu}^v \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{h_{\mu+1} < \dots < h_r}^{I, r} \alpha_{h_{\mu+1} \dots h_r}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) dy_{s_1} \dots dy_{s_\mu} dx_{h_{\mu+1}} \dots dx_{h_r}.$$

Ricordiamo che i coefficienti della forma α sono di classe $C^1(D \times Y)$.

Siamo così pervenuti ad esprimere il funzionale $I_v(y)$ dato da (7), cioè quando v soddisfi al sistema (3), come l'integrale su V della forma esterna (9):

$$I_v(y) = \int_V \sum_{\mu}^v \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{h_{\mu+1} < \dots < h_r}^{I, r} \alpha_{h_{\mu+1} \dots h_r}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) dy_{s_1} \dots dy_{s_\mu} dx_{h_{\mu+1}} \dots dx_{h_r}.$$

Il problema della caratterizzazione delle funzioni di invarianza per il problema di Dirichlet è così ricondotto a quello della caratterizzazione delle forme esterne del tipo (9) tali che l'integrale esteso ad ogni varietà regolare aperta V di dominio base D dipenda solo dal bordo della varietà.

(6) La nomenclatura ed i concetti relativi alle varietà, alle proprietà topologiche degli insiemi, ed alle forme differenziali esterne qui usati sono sinteticamente introdotti nei §§ I, II, III e IV del lavoro di G. FICHERA, *Sull'integrazione in grande delle forme differenziali esterne di qualsivoglia grado*, « Universidad Nacional de Tucuman, Revista », serie A, vol. 6 (1947) pp. 51-70.

Qui e nel seguito le varietà che si considerano si intendono orientate. Come orientazione positiva di V intendiamo quella indotta dalla rappresentazione cartesiana, che è la sola che si considera, della varietà stessa; il bordo di V resta orientato in conseguenza.

Tale catterizzazione è resa agevole dalla applicabilità nel nostro caso dei due teoremi seguenti, contenuti in un lavoro sull'integrabilità in grande delle forme esterne del prof. Fichera ⁽⁷⁾:

F₁) se un dominio di uno spazio ad m dimensioni è n -normale esso ha semplice la connessione $(m - n)$ -dimensionale;

F₂) se un dominio ha semplice la connessione r -dimensionale, condizione necessaria e sufficiente perché una r -forma di classe C^1 ivi definita vi sia integrabile, cioè omologa a zero, è che sia chiusa.

Per F₁), poiché il dominio $D \times Y$ contiene ogni dominio n -normale rispetto ad $y_1, \dots, y_n$ e tale che $x_1, \dots, x_r$ descriva D , si può affermare che $D \times Y$ ha semplice la connessione r -dimensionale. Possiamo allora dimostrare, servendoci di F₂), il

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$\int_V \alpha$$

dipenda, per ogni varietà regolare aperta V avente dominio base D , solo dal bordo di V , è che α sia integrabile in $D \times Y$.

La sufficienza della condizione è subito vista. Infatti, supposto $\alpha = d\beta$, β essendo una $(r - 1)$ -forma di classe C^2 ($D \times Y$) nelle $n + r$ variabili y_i e x_k ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, r$), risulta, indicando con dV il bordo di V , per la formula di Stokes:

$$\int_V \alpha = \int_{dV} \beta,$$

ciò che mostra che l'integrale considerato non varia al variare di V , fissato il bordo.

Tenuto conto della circostanza che $D \times Y$ ha semplice la connessione r -dimensionale e che la forma α è di classe C^1 ($D \times Y$), sarà acquisita la necessità della condizione, in virtù di F₂), se dimostreremo la necessità della chiusura di α .

Nell'ipotesi che

$$(10) \quad \int_V \alpha = \text{costante}$$

per ogni V di dominio base D e di bordo arbitrariamente fissato, se V e V' sono due varietà di dominio base D aventi lo stesso bordo tali che $V - V'$ costituisca il bordo di una varietà W ad $r + 1$ dimensioni immersa in $D \times Y$, si ha per la formula di Stokes:

$$(11) \quad \int_W d\alpha = \int_V \alpha - \int_{V'} \alpha = 0.$$

(7) Cfr. G. FICHERA, loc. cit. ⁽⁶⁾ teor. IV p. 57 e corollario p. 69.

Consideriamo la forma $d\alpha$. Essa, essendo una $(r+1)$ -forma nelle $n+r$ variabili y_i e x_k , è del tipo:

$$d\alpha = \sum_{\mu}^{\min(n, r+1)} \sum_{s_1 < \dots < s_\mu}^{I, n} \sum_{t_{\mu+1} < \dots < t_{r+1}}^{I, r} \gamma_{t_{\mu+1} \dots t_{r+1}}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) dy_{s_1} \dots dy_{s_\mu} dx_{t_{\mu+1}} \dots dx_{t_{r+1}}.$$

Cominciamo col provare che, nell'ipotesi (10), sono necessariamente nulli in ogni punto di $D \times Y$ i coefficienti dei termini di $d\alpha$ corrispondenti a $\mu = 1$, cioè le funzioni

$$\gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y).$$

Fissato un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ interno a $D \times Y$, se d è la distanza che $\bar{x}$ ha da $\bar{\mathcal{F}}D$, detto ε un numero positivo arbitrario, purché minore o uguale a d , indichi D_ε la sfera dello spazio X di centro $\bar{x}$ e raggio ε ; risulta $D_\varepsilon \subset D$. Definiamo su D la funzione di classe $C^1(D)$:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^r (x_k - \bar{x}_k)^2 - \varepsilon^2 \right]^2 & \text{per } x \in D_\varepsilon \\ 0 & \text{per } x \in D - D_\varepsilon \end{cases}$$

e consideriamo per ogni fissato s_1 in $1, \dots, n$ le varietà

$$V_\varepsilon^{(1)} \equiv \begin{cases} x_k = \bar{x}_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} + \varphi_\varepsilon(x) \end{cases} \quad \tilde{V}_\varepsilon^{(1)} \equiv \begin{cases} x_k = \bar{x}_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} - \varphi_\varepsilon(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in D \\ i \neq s_1 \end{matrix}$$

di dominio base D e aventi lo stesso bordo. $V_\varepsilon^{(1)} - \tilde{V}_\varepsilon^{(1)}$ costituisce il bordo della varietà ad $r+1$ dimensioni immersa in $D \times Y$:

$$W_\varepsilon^{(1)} \equiv \begin{cases} x_k = \bar{x}_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} + t\varphi_\varepsilon(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} i \neq s_1 \\ x \in D_\varepsilon \\ -1 \leq t \leq 1 \end{matrix}$$

cui appartiene il punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

È immediato constatare che

$$\int_{W_\varepsilon^{(1)}} d\alpha = \int_{W_\varepsilon^{(1)}} \gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y) dy_{s_1} dx_I \dots dx_r$$

onde, applicando la (11):

$$(12) \quad \int_{W_\varepsilon^{(1)}} \gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y) dy_{s_1} dx_I \dots dx_r = 0.$$

Tenuto conto che

$$\text{mis } W_\varepsilon^{(1)} = \int_{W_\varepsilon^{(1)}} dy_{s_1} dx_I \dots dx_r$$

si deduce:

$$\left| \frac{1}{\text{mis } W_{\varepsilon}^{(1)}} \int_{W_{\varepsilon}^{(1)}} \gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y) dy_{s_1} dx_I \dots dx_r - \gamma_{I \dots r}^{s_1}(\bar{x}, \bar{y}) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\text{mis } W_{\varepsilon}^{(1)}} \int_{W_{\varepsilon}^{(1)}} |\gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y) - \gamma_{I \dots r}^{s_1}(\bar{x}, \bar{y})| dy_{s_1} dx_I \dots dx_r.$$

Ora, fissato $\sigma > 0$ ad arbitrio, è possibile determinare $\rho > 0$ in guisa tale che per $\varepsilon \leq \rho$ risulti $\max_{(x, y) \in W_{\varepsilon}^{(1)}} |\gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y) - \gamma_{I \dots r}^{s_1}(\bar{x}, \bar{y})| \leq \sigma$; si conclude che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{mis } W_{\varepsilon}^{(1)}} \int_{W_{\varepsilon}^{(1)}} \gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y) dy_{s_1} dx_I \dots dx_r = \gamma_{I \dots r}^{s_1}(\bar{x}, \bar{y})$$

e quindi, per la (12):

$$(13) \quad \gamma_{I \dots r}^{s_1}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

per ogni s_1 in $1, \dots, n$.

Poiché il ragionamento fatto è valido per ogni $(\bar{x}, \bar{y})$ interno a $D \times Y$ e le funzioni $\gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y)$ sono continue, è acquisita la necessità dell'annullarsi dei coefficienti $\gamma_{I \dots r}^{s_1}(x, y)$ della forma $d\alpha$ in ogni punto di $D \times Y$.

Si può provare ora che sono necessariamente nulli i coefficienti in corrispondenza a $\mu = 2$, cioè del tipo

$$\gamma_{t_2 \dots t_{r+1}}^{s_1 s_2}(x, y).$$

Con le notazioni introdotte nel caso precedente, consideriamo, per ogni possibile scelta di s_1, s_2 ed m , le varietà

$$V_{\varepsilon}^{(2)} \equiv \begin{cases} x_k = x_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} + \varphi_{\varepsilon}(x) \\ y_{s_2} = \bar{y}_{s_2} + x_m - \bar{x}_m \end{cases} \quad \tilde{V}_{\varepsilon}^{(2)} \equiv \begin{cases} x_k = x_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} - \varphi_{\varepsilon}(x) \\ y_{s_2} = \bar{y}_{s_2} + x_m - \bar{x}_m \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in D \\ i \neq s_1, s_2. \end{matrix}$$

Esse hanno lo stesso bordo e $V_{\varepsilon}^{(2)} - \tilde{V}_{\varepsilon}^{(2)}$ è il bordo della varietà ad $r+1$ dimensioni immersa in $D \times Y$

$$W_{\varepsilon}^{(2)} \equiv \begin{cases} x_k = x_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} + t\varphi_{\varepsilon}(x) \\ y_{s_2} = \bar{y}_{s_2} + x_m - \bar{x}_m \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in D_{\varepsilon} \\ -1 \leq t \leq 1 \\ i \neq s_1, s_2 \end{matrix}$$

cui appartiene il punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Osserviamo che dalla (11) e dalla rappresentazione di $W_{\varepsilon}^{(2)}$ discende:

$$0 = \int_{W_{\varepsilon}^{(2)}} d\alpha = \int_{W_{\varepsilon}^{(2)}} \{ \gamma_{i_1 \dots i_r}^{s_1} (x, y) dy_{s_1} dx_{i_1} \dots dx_{i_r} + \gamma_{i_3 \dots i_{r+1}}^{s_1 s_2} (x, y) dy_{s_1} dy_{s_2} dx_{i_3} \dots dx_{i_{r+1}} \}$$

essendo gli indici $i_3 < \dots < i_{r+1}$ determinati dalla esclusione di m da $1, \dots, r$ (dato che su $W_{\varepsilon}^{(2)}$ è $dy_{s_2} = dx_m$). Avendo già provato che $\gamma_{i_1 \dots i_r}^{s_1} (x, y) = 0$ in $D \times Y$, l'ultima relazione scritta si riduce a

$$\int_{W_{\varepsilon}^{(2)}} \gamma_{i_3 \dots i_{r+1}}^{s_1 s_2} (x, y) dy_{s_1} dy_{s_2} dx_{i_3} \dots dx_{i_{r+1}} = 0.$$

Con considerazioni analoghe a quelle svolte per provare l'annullarsi di $\gamma_{i_1 \dots i_r}^{s_1} (x, y)$, si perviene a dimostrare che

$$\gamma_{i_3 \dots i_{r+1}}^{s_1 s_2} (x, y) = 0$$

in $D \times Y$.

Se $\min(n, r+1) = 2$, la necessità della chiusura di α è già provata.

Se invece $\min(n, r+1) > 2$, per ogni valore di μ maggiore di due si procederà in modo analogo al caso $\mu = 1$ e $\mu = 2$, costruendo, in corrispondenza ad ogni valore di μ ed ad ogni coefficiente corrispondente a quel valore, una particolare varietà $W_{\varepsilon}^{(\mu)}$ atta a mostrare la necessità dell'annullarsi di quel coefficiente, nota che sia la necessità dell'annullarsi dei coefficienti di $d\alpha$ corrispondenti ad ogni valore di μ minore.

Così per dimostrare che

$$(14) \quad \gamma_{i_{\mu+1} \dots i_{r+1}}^{s_1 s_2 \dots s_{\mu}} (x, y) = 0$$

in $D \times Y$, avendo dimostrato che sono nulli tutti i coefficienti di $d\alpha$ del tipo $\gamma_{i_{\nu+1} \dots i_{r+1}}^{s_1 \dots s_{\nu}} (x, y)$ con $\nu < \mu$, basterà considerare la varietà

$$W_{\varepsilon}^{(\mu)} \equiv \begin{cases} x_k = \bar{x}_k \\ y_i = \bar{y}_i \\ y_{s_1} = \bar{y}_{s_1} + t\varphi_{\varepsilon}(x) \\ y_{s_{\tau}} = \bar{y}_{s_{\tau}} + x_{i_{\tau-1}} - \bar{x}_{i_{\tau-1}} \end{cases} \quad \begin{aligned} & x \in D_{\varepsilon} \\ & i \neq s_1, s_2, \dots, s_{\mu} \\ & \tau = 2, \dots, \mu \end{aligned}$$

gli indici $i_{\tau-1}$ essendo distinti fra loro e da $i_{\mu+1}, \dots, i_{r+1}$.

Analogamente a quanto visto per $\mu = 2$ si avrà

$$0 = \int_{W_{\varepsilon}^{(\mu)}} d\alpha = \int_{W_{\varepsilon}^{(\mu)}} \gamma_{i_{\mu+1} \dots i_{r+1}}^{s_1 \dots s_{\mu}} (x, y) dy_{s_1} \dots dy_{s_{\mu}} dx_{i_{\mu+1}} \dots dx_{i_{r+1}}$$

e da questa, ripetendo le considerazioni svolte nel caso $\mu = 1$, si perverrà alla (14).

Provandosi col procedimento descritto che da (10) discende l'annullarsi di tutti i coefficienti di $d\alpha$, è dimostrata la necessità della chiusura di α perché valga la (10), e quindi, per F_2 , la necessità della integrabilità di α . Il teorema di caratterizzazione delle forme esterne corrispondenti alle funzioni (6) d'invarianza per il problema di Dirichlet è così conseguito.

2. Applichiamo il risultato ottenuto al caso in cui $n = r = 3$, cioè per il conseguimento della più generale funzione di invarianza (di classe C^1 rispetto alle x_h e y_i) in $E^{(1)}(y^o, D)$, essendo le $y(x)$ funzioni vettoriali a tre componenti definite nel dominio regolare D dello spazio cartesiano reale a tre dimensioni.

Consideriamo all'uopo una generica 2-forma in 6 variabili

$$\beta = \sum_{i_1 < i_2}^{1,6} \beta_{i_1 i_2}(u_1, \dots, u_6) du_{i_1} du_{i_2}$$

definita per $(u_1, u_2, u_3) \in D$ e $(u_4, u_5, u_6) \in Y$ coi coefficienti di classe $C^2(D \times Y)$, talché sia differenziabile ed il differenziale abbia i coefficienti di classe $C^1(D \times Y)$.

È allora:

$$(15) \quad d\beta = \sum_{i_1 < i_2 < i_3}^{1,6} \left(\frac{\partial \beta_{i_1 i_2}}{\partial u_{i_3}} - \frac{\partial \beta_{i_1 i_3}}{\partial u_{i_2}} + \frac{\partial \beta_{i_2 i_3}}{\partial u_{i_1}} \right) du_{i_1} du_{i_2} du_{i_3}$$

una generica 3-forma in 6 variabili omologa a zero di classe $C^1(D \times Y)$.

Sostituiamo u_h con x_h se $h \leq 3$ e con y_{h-3} se $h > 3$; e $\beta_{i_l i_j}$ ($l_i < l_j$) con $\lambda_{i_l i_j}$ se $l_j \leq 3$, con $\lambda_{i_l i_j}^{l_j-3}$ se $l_i \leq 3, l_j > 3$, e con $\lambda_{i_l i_j}^{l_i-3, l_j-3}$ se $l_i > 3$; la (10) si scrive:

$$(15') \quad \begin{aligned} \alpha = & \left(\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 dx_3 + \\ & + \sum_{h_2 < h_3}^{1,3} \sum_{s_1}^{1,3} \left(\frac{\partial \lambda_{h_2 h_3}}{\partial y_{s_1}} - \frac{\partial \lambda_{h_2}}{\partial x_{h_3}} + \frac{\partial \lambda_{h_3}}{\partial x_{h_2}} \right) dy_{s_1} dx_{h_2} dx_{h_3} + \\ & + \sum_{h_3}^{1,3} \sum_{s_1 < s_2}^{1,3} \left(\frac{\partial \lambda_{h_3}}{\partial y_{s_2}} - \frac{\partial \lambda_{h_3}}{\partial y_{s_1}} + \frac{\partial \lambda_{s_1 s_2}}{\partial x_{h_3}} \right) dy_{s_1} dy_{s_2} dx_{h_3} + \\ & + \left(\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial y_3} - \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial y_2} + \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial y_1} \right) dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned}$$

Tenuto conto della posizione

$$A_{h_1 \dots h_\mu}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) = \delta_{123}^{h_1 h_2 h_3} \alpha_{h_{\mu+1} \dots h_3}^{s_1 \dots s_\mu}(x, y) \quad \mu = 2, 3$$

che inverte quella fatta in generale per passare dai coefficienti del polinomio espresso da (6) a quelli della forma (9), quando si faccia $n = r = 3$, e osservando che

$$\delta_{h_1 \dots h_\mu}^{l_1 \dots l_\mu} p_{s_1 l_1} \dots p_{s_\mu l_\mu} = \begin{vmatrix} p_{s_1 l_1} \dots p_{s_1 l_\mu} \\ \dots \dots \dots \\ p_{s_\mu l_1} \dots p_{s_\mu l_\mu} \end{vmatrix}$$

e

$$\delta_{123}^{h_1 h_2 h_3} = \begin{cases} (-1)^{h_1-1} & \text{se } h_1 \neq h_2 < h_3 \neq h_1 \\ (-1)^{h_3-1} & \text{se } h_3 \neq h_1 < h_2 \neq h_3 \end{cases}$$

si scrive immediatamente, a partire da (15'), la più generale funzione d'invarianza cercata:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial x_1} + \sum_{\substack{h_1 \\ (h_1 \neq h_2 < h_3 \neq h_1)}}^{1,3} \sum_{s_1}^{1,3} (-1)^{h_1-1} \left(\frac{\partial \lambda_{h_2 h_3}}{\partial y_{s_1}} - \frac{\partial \lambda_{h_2}^{s_1}}{\partial x_{h_3}} + \frac{\partial \lambda_{h_3}^{s_1}}{\partial x_{h_2}} \right) p_{s_1 h_1} + \\ & + \sum_{\substack{h_3 \\ (h_3 \neq h_1 < h_2 \neq h_3)}}^{1,3} \sum_{s_1 < s_2}^{1,3} (-1)^{h_3-1} \left(\frac{\partial \lambda_{h_3}^{s_1}}{\partial y_{s_2}} - \frac{\partial \lambda_{h_3}^{s_2}}{\partial y_{s_1}} + \frac{\partial \lambda_{s_1 s_2}}{\partial x_{h_3}} \right) \cdot \begin{vmatrix} p_{s_1 h_1} & p_{s_1 h_3} \\ p_{s_2 h_1} & p_{s_2 h_3} \end{vmatrix} + \\ & + \left(\frac{\partial \lambda_{12}}{\partial y_3} - \frac{\partial \lambda_{13}}{\partial y_2} + \frac{\partial \lambda_{23}}{\partial y_1} \right) \cdot \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

essendo le λ funzioni definite in $D \times Y$ ed ivi di classe C^2 rispetto alle x_h ed y_i .