
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

BENIAMINO SEGRE

Sull'hessiano di taluni polinomi (determinanti, pfaffini, discriminanti, risultanti, hessiani). Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.3-4, p. 109-117.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_3-4_109_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Ferie 1964 Settembre-Ottobre

NOTE DI SOCI

(Ogni Nota porta a piè di pagina la data di arrivo o di presentazione)

Algebra. — *Sull'hessiano di taluni polinomi (determinanti, pfaffiani, discriminanti, risultanti, hessiani).* Nota I (*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

Investigations on a number of remarkable Polynomials (those specified in the title), each of which divides its own Hessian: cf. the *Summary* below.

Sono lieto di dedicare la presente Nota I ed una successiva Nota II (con lo stesso titolo) al collega ed amico carissimo **Alessandro Terracini**, in occasione del suo 75° compleanno. Ciò in segno di ammirazione ed affetto, ed anche a ricordo di quel lontano 1925-26 quando io fui assistente alla cattedra da lui ricoperta presso l'Università di Torino.

I. — SOMMARIO.

1. Il contenuto di questo lavoro, già abbastanza chiaro dal titolo, apparirà manifesto dalla raccolta che qui daremo dei principali risultati in esso conseguiti.

TEOREMA I. — Detto A il determinante generale d'ordine $n \geq 2$ ad elementi variabili, l'hessiano di A rispetto a tali variabili vale esattamente

$$H_A = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} (n-1) A^{n(n-2)}.$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 3 ottobre 1964.

TEOREMA II. - Detto A il determinante simmetrico generale d'ordine $n \geq 2$ ad elementi variabili, l'hessiano di A rispetto a tali variabili vale esattamente

$$H_A = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} 2^{n(n-1)/2} (n-1) A^{(n+1)(n-2)/2}.$$

TEOREMA III. - Detto A il determinante emisimmetrico generale d'ordine $2m \geq 2$ ad elementi variabili, l'hessiano di A rispetto a tali variabili vale esattamente

$$H_A = (-1)^{m-1} 2^{2m^2-m} (2m-1) A^{(m-1)(2m-1)}.$$

TEOREMA IV. - Il paffiano P generale di grado $m \geq 1$ ha per hessiano:

$$H_P = (-1)^{m-1} (m-1) P^{(m-2)(2m-1)}.$$

TEOREMA V. - Il discriminante D di una forma a coefficienti indeterminati di grado k in $r+1$ variabili, nell'ipotesi che sia $k \geq 2, r \geq 1$, senza che però si abbia $k=2, r=1$, entra a fattore in tutti i minori d'ordine $r+3$ della matrice hessiana di D rispetto ai suddetti coefficienti (ma non in tutti i minori d'ordine $r+2$). Conseguentemente, il determinante H_D di tale matrice risulta divisibile per una potenza di D , di esponente (positivo) almeno uguale a

$$\binom{k+r}{k} - r - 2.$$

TEOREMA VI. - Riferiamoci a k (≥ 1) serie di variabili, la i^{ma} delle quali consti di $r_i + 1$ (≥ 2) variabili indipendenti ($i = 1, 2, \dots, k$). Posto per abbreviare

$$\rho = r_1 + r_2 + \dots + r_k,$$

si considerino $\rho+1$ polinomi f_j in esse ($j = 0, 1, \dots, \rho$), a coefficienti indeterminati, tali che f_j sia omogeneo di grado n_{ji} (≥ 1) nella i^{ma} serie di variabili. Resta allora definito (a meno di un fattore numerico) il risultante R delle f rispetto alle suddette k serie di variabili, quale forma irriducibile nei coefficienti delle f annullantesi se, e soltanto se, le equazioni $f_j = 0$ sono compatibili per valori non tutti nulli di ciascuna serie di variabili. Ebbene, l'hessiano H_R di R risulta divisibile per una potenza di R , di esponente (≥ 0) almeno uguale a

$$\sum_{j=0}^{\rho} \prod_{i=1}^k \binom{n_{ji} + r_i}{r_i} - 2\rho - 2;$$

numero questo ch'è sempre positivo, tranne nel caso ($k = n_{ji} = r_i = 1$) in cui le f siano due forme lineari binarie.

TEOREMA VII. - Si denoti con f una generica forma cubica in $r+1$ (≥ 3) variabili e con h la relativa forma hessiana. L'hessiana di h risulta allora una combinazione lineare delle f, h , a coefficienti forme di gradi opportuni nelle suddette variabili.

2. Le dimostrazioni dei sette teoremi testé enunciati fanno intervenire in modo accessorio altre proprietà, come quelle date dai lemmi stabiliti nei nn. 9, 14 e 16; di più, a tali teoremi vengono qui collegati numerosi risultati addizionali, quali ad es. i corollari dei nn. 4 e 15. Inoltre il teor. VI introduce una nuova ampia nozione di *risultante*, per cui veggasi il n. 13, che si riduce a quella ben nota relativa ad $r (\geq 2)$ forme in r variabili nel caso particolare ove si assuma $k=1$.

Va poi rilevata la congettura formulata nel n. 12 (e resa plausibile da talune proposizioni là enunciate), secondo la quale l'esponente di cui alla fine del teor. V avrebbe sempre il valore ivi specificato, e non un valore maggiore, con una sola eccezione relativa a $k=3$, $r=1$. Un'analogha congettura (poggiante sull'esame di alcuni interessanti casi particolari) vien qui emessa nel n. 15, in relazione all'esponente di cui al teor. VI.

Il teor. VII dà una generalizzazione agli spazi superiori di nozioni classiche relative ai fasci sizigetici di cubiche piane, giusta l'accenno del n. 17, e suggerirebbe ulteriori approfondimenti. Si constata però facilmente ch'esso non può venire esteso a forme di grado superiore al terzo.

Notiamo infine che la parte geometrica del teor. II discende anche dal teor. V per $k=2$, com'è indicato al principio del n. 12, e trovasi già in un mio vecchio lavoro ⁽¹⁾. Poggiando su questo, si potrebbero ottenere per il contenuto geometrico dei teoremi I–IV dimostrazioni di tipo diverso da quelle – d'altronde semplicissime – qui date nei nn. 4, 6, 8, 10 (cfr. il primo capoverso del n. 15). In un mio lavoro che uscirà negli «Annali di Matematica», stabilirò poi fra l'altro – per i determinanti hermitiani (generalizzati) – un risultato del tutto analogo a quelli espressi dai teoremi I–III.

II. – HESSIANO DI UN DETERMINANTE GENERALE.

3. Riferiamoci ad un *determinante* $A = \det \| a_{ij} \|_{i,j=1,2,\dots,n}$ di un qualsiasi ordine $n \geq 2$, i cui elementi considereremo in un ordine comunque fissato: per esempio

$$(I) \quad a_{11} \quad , \quad a_{22} \quad , \quad \dots \quad , \quad a_{nn} \quad ,$$

seguiti dalle $n(n-1)/2$ coppie

$$a_{ij} \quad , \quad a_{ji} \quad (i < j \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n) \quad ,$$

prese in ordine arbitrario. A risulta allora una forma di grado n in questi n^2 elementi; ed è subito visto che:

(1) Detta parte geometrica, nel caso particolare $n=3$, relativo quindi alla varietà delle corde della superficie di Veronese, è stata indipendentemente riottenuta dal Terracini in una recente ricerca ancora inedita. Ed è precisamente la notizia di tale ricerca che mi stimolò a redigere le presenti due Note.

$$(2) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial a_{ij} \partial a_{i'j'}} = \begin{cases} (-1)^{i+i'+j+j'} A_{ii',jj'} & \text{se } i < i', j < j', \text{ oppure } i > i', j > j', \\ (-1)^{i+i'+j+j'+1} A_{ii',jj'} & \text{se } i < i', j > j', \text{ oppure } i > i', j < j', \\ 0 & \text{se } i = i' \text{ e/o } j = j', \end{cases}$$

dove $A_{ii',jj'}$ (con $i \neq i', j \neq j'$) vale sempre 1 se $n = 2$, mentre invece, se $n > 2$, $A_{ii',jj'}$ uguaglia il minore d'ordine $n - 2$ che si ottiene da A sopprimendo le righe di posti i, i' e le colonne di posti j, j' .

L'hessiano di A rispetto alle a :

$$(3) \quad H_A = \det \left\| \frac{\partial^2 A}{\partial a_{ij} \partial a_{i'j'}} \right\|$$

è una forma di grado $n^2(n - 2)$ nelle stesse a , che passiamo a valutare nell'ipotesi che a queste si attribuiscono i valori

$$(4) \quad a_{ij}^* = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

in corrispondenza ai quali risulta ovviamente

$$(5) \quad A^* = 1.$$

Avuto riguardo alle (2), si vede intanto agevolmente che tutti gli elementi della matrice a secondo membro nella (3) sono allora nulli tranne al più quelli del determinante formato dalle prime n righe e dalle prime n colonne, nonché quelli dei minori principali del 2° ordine determinati dalle $n(n - 1)/2$ coppie di righe e colonne (fra loro adiacenti) a quelle successive. Poiché il suddetto determinante d'ordine n riducesi precisamente a

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n - 1),$$

e ciascuno degli ulteriori minori principali considerati vale

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

così in definitiva risulta

$$H_{A^*} = (-1)^{n-1} (n - 1) \cdot (-1)^{n(n-1)/2} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} (n - 1).$$

4. Diamo ora alle a dei valori numerici $\bar{a}$ arbitrari, soggetti alla sola condizione che - in corrispondenza a questi - si abbia

$$(7) \quad \bar{A} \neq 0,$$

talchè la matrice $\|\bar{a}_{ij}\|$ ammetterà l'inversa, $\|\bar{a}_{ij}\|^{-1}$. La relazione fra matrici

$$(8) \quad \|a_{ij}\| \cdot \|\bar{a}_{ij}\|^{-1} = \|a'_{ij}\|$$

definisce manifestamente una sostituzione lineare invertibile fra le a e le a' . In base alla classica proprietà di covarianza dell'hessiano, ne discende che $H_{A'}$ differisce da H_A per un fattore numerico non nullo (uguale ad una certa potenza del determinante della suddetta sostituzione lineare). D'altra parte — in forza della (8) — se alle a si attribuiscono i valori $\bar{a}$ le a' vengono ad assumere i valori a^* , in corrispondenza ai quali (n. 4) l'hessiano di A' non si annulla. Ne discende che la (7) viene sempre ad implicare la

$$(9) \quad H_A \neq 0.$$

In altri termini, i soli valori delle a per cui H_A possa annullarsi sono quelli che annullano A .

Poiché A è notoriamente una forma assolutamente irriducibile nelle a , ciò implica che debba sussistere un'identità della forma:

$$(10) \quad H_A = cA^k,$$

dove k denota un opportuno intero e c non dipende dalle a . Il raffronto dei gradi nelle a dei due membri della (10) porge allora $k = n(n-2)$; si ottiene poi subito $c = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} (n-1)$, specializzando nella (10) le a nelle a^* e rammentando il n. 3.

Risulta così stabilito il teor. I (enunciato nel n. 1). Da esso dedurremo quale corollario la seguente proposizione.

Con riferimento ad un qualsiasi determinante $A = \det \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n}$ d'ordine $n \geq 2$, si consideri il determinante B d'ordine n^2 avente

$$b_{ij,i'j'} = a_{ij}a_{i'j'} / (n-1) - a_{ij'}a_{i'j}$$

quale elemento situato nell'orizzontale di posto i, j e nella verticale di posto i', j' ($i, j, i', j' = 1, 2, \dots, n$). Sussiste allora l'identità:

$$B = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} A^{2n} / (n-1).$$

Atteso il carattere algebrico di questa, basterà dimostrarla nell'ipotesi che sia $A \neq 0$ (sicchè, per quanto sopra, sarà altresì $H_A \neq 0$). Osserviamo all'uopo che il prodotto della riga di posto i, j in B per la riga di posto i_1, j_1 in H_A uguaglia il determinante che si ricava da A col sopprimere la riga i^{ma} e la colonna j^{ma} e sostituire ad esse rispettivamente la riga i_1^{ma} e la colonna j_1^{ma} dello stesso A : ciò si verifica agevolmente sviluppando il determinante così ottenuto secondo la riga i^{ma} e simultaneamente secondo la colonna j^{ma} , e rammentando le (2).

Ne discende che il suddetto prodotto è sempre nullo eccettuato soltanto per $i = i_1, j = j_1$, nel qual caso esso vale A . Risulta pertanto

$$BH_A = A^{n^2}.$$

Poiché per ipotesi $H_A \neq 0$, da qui si trae la $B = A^{n^2}/H_A$, che fornisce subito l'asserto quando vi si esprima H_A poggiando sul teor. I.

III. - HESSIANO DI UN DETERMINANTE SIMMETRICO.

5. Le notazioni ed argomentazioni della Sezione II possono venir agevolmente adattate al caso di un determinante simmetrico, A . Attualmente questo è una forma assolutamente irriducibile di grado n negli $n(n+1)/2$ elementi fra loro indipendenti (1) ed

$$(11) \quad a_{ij} \quad (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n),$$

risultando per ipotesi

$$(12) \quad a_{ji} = a_{ij} \quad (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n);$$

talché il relativo hessiano, che verrà ancora designato con H_A , risulta una forma di grado $n(n+1)(n-2)/2$ in detti elementi, questa volta espressa da un determinante d'ordine $n(n+1)/2$.

Pure ora possiamo specializzare le a nelle (4), con che vale la (5). Corrispondentemente, si vede senza difficoltà che nel suddetto determinante tutti gli elementi vengono ad annullarsi tranne al più quelli del minore principale formato dalle prime n righe e colonne, che riducesi a (6), nonché gli $n(n-1)/2$ elementi principali non situati in tale minore, ciascuno dei quali viene ad assumere il valore -2 . Si ottiene dunque:

$$H_{A^*} = (-1)^{n-1} (n-1) \cdot (-2)^{n(n-1)/2} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} 2^{n(n-1)/2} (n-1).$$

6. Con le notazioni del n. 5 diamo alle a dei valori $\bar{a}$ arbitrari, soddisfacenti alle (12), soggetti alla sola condizione ulteriore che - in corrispondenza ad essi - sussista la (7). Poiché la forma quadratica $\sum \bar{a}_{ij} x_i x_j$ può conseguentemente venire ridotta ad una somma di n quadrati operando una sostituzione lineare invertibile sulle x , ne discende la possibilità di determinare delle b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) per cui risulti:

$$\|\bar{a}_{ij}\| = \|b_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|_{-1}$$

(eppertanto $\det \|b_{ij}\| \neq 0$), dove il segno -1 in basso significa trasposizione.

La relazione fra matrici

$$\|b_{ij}\|^{-1} \cdot \|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|_1^{-1} = \|a'_{ij}\|$$

definisce allora una sostituzione lineare invertibile fra le a e le a' , conservante le (12), mediante la quale ai valori $\bar{a}$ delle a vengono a corrispondere i valori (4) delle a' . Come al n. 4, ne conseguono - con l'attuale significato dei simboli - la (9) e quindi la (10). Il raffronto dei gradi nelle a dei due membri della (10) porge ora subito $k = (n+1)(n-2)/2$; si ottiene poi $c = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} 2^{n(n-1)/2} (n-1)$, specializzando nella (10) le a nelle a^* e rammentando il n. 5.

Risulta così stabilito il teor. II (enunciato nel n. 1).

IV. — HESSIANO DI UN DETERMINANTE EMISIMMETRICO
E DEL RELATIVO PFAFFIANO.

7. Nella presente Sezione denoteremo con $A = \det \| a_{ij} \|_{i,j=1,2,\dots,n}$ un determinante emisimmetrico, d'ordine

$$n = 2m \geq 4$$

pari (altrimenti risulterebbe identicamente $A = 0$). A è manifestamente una forma di grado $2m$ negli $m(2m-1)$ elementi indipendenti (11), essendo per ipotesi

$$(13) \quad a_{ii} = 0, \quad a_{ji} = -a_{ij} \quad (i < j; i, j = 1, 2, \dots, n);$$

quegli elementi (11) verranno considerati in un ordine comunque fissato: per esempio

$$(14) \quad a_{1,2m}, \quad a_{2,2m-1}, \quad \dots, \quad a_{m,m+1},$$

seguiti dalle $m(m-1)$ coppie

$$(15) \quad a_{ij}, \quad a_{2m-j+1,2m-i+1} \quad (i < j, i+j \leq 2m; i, j = 1, 2, \dots, 2m)$$

prese in ordine arbitrario. È ben noto che sussiste l'identità

$$(16) \quad A = P^2,$$

dove

$$(17) \quad P = a_{1,2m} a_{2,2m-1} \dots a_{m,m+1} + \dots$$

denota il pfaffiano di A ; questo è una forma assolutamente irriducibile di grado m nei suddetti elementi.

Designeremo con H_A, H_P l'hessiano di A, P rispetto a questi ultimi, e con a^* la specializzazione delle a che si ottiene attribuendo il valore 1 a ciascuna delle (14) ed il valore zero a ciascuna delle (15). In base alla (17), e con notazione evidente, si ha intanto subito

$$P^* = 1.$$

Inoltre H_A è un determinante d'ordine $m(2m-1)$, avente perciò grado $2m(m-1)(2m-1)$ nelle a . Con la specializzazione testé indicata, gli elementi di quel determinante riduconsi tutti allo zero tranne al più quelli del determinante formato dalle prime m righe e dalle prime m colonne, nonché quelli dei minori principali del 2° ordine determinati dalle $m(m-1)$ coppie di righe e colonne (fra loro adiacenti) a quelle successive. Poiché il suddetto determinante d'ordine m diventa precisamente

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 2 & \dots & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 4 & 4 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} 2^m (2m-1),$$

e ciascuno degli ulteriori minori principali considerati vale

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

così in definitiva risulta

$$H_A^* = (-1)^{m-1} 2^m (2m-1) \cdot (-4)^{m(m-1)} = (-1)^{m-1} 2^{2m^2-m} (2m-1).$$

8. Con le notazioni del n. 7 diamo ora alle a dei valori $\bar{a}$ arbitrari, soddisfacenti alle (13), soggetti alla sola condizione ulteriore che - in corrispondenza ad essi - valga la (7), e cioè la $\bar{P} \neq 0$. Poiché la forma bilineare $\Sigma \bar{a}_{ij} x_i y_j$ può attualmente venire ridotta alla forma canonica $\Sigma a_{ij}^* x_i y_j$ con l'effettuare sulle x e sulle y una stessa opportuna sostituzione lineare invertibile, ne discende la possibilità di determinare delle b_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) per cui risulti:

$$\|\bar{a}_{ij}\| = \|b_{ij}\| \cdot \|a_{ij}^*\| \cdot \|b_{ij}\|_{-1}$$

(eppertanto $\det \|b_{ij}\| \neq 0$).

La relazione fra matrici

$$\|b_{ij}\|^{-1} \cdot \|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\|_{-1} = \|a_{ij}'\|$$

definisce allora una sostituzione lineare invertibile fra le a e le a' , conservante le (13), mediante la quale ai valori $\bar{a}$ delle a vengono a corrispondere per le a' i valori a^* (definiti nel n. 7). Atteso il carattere covariante dell'hessiano, l'essere (n. 7) $H_A^* \neq 0$ implica il sussistere della (9). In altri termini, i soli valori delle a per cui H_A possa annullarsi sono quelli che annullano P .

Dall'irriducibilità di P discende che attualmente deve sussistere un'identità della forma

$$(18) \quad H_A = c P^k,$$

dove k denota un opportuno intero e c non dipende dalle a . Il raffronto dei gradi nelle a dei due membri della (18) porge quindi $k = 2(m-1)(2m-1)$; si ottiene poi subito $c = (-1)^{m-1} 2^{2m^2-m} (2m-1)$, specializzando nella (18) le a nelle a^* e rammentando il n. 7. In definitiva la (18) diventa

$$(19) \quad H_A = (-1)^{m-1} 2^{2m^2-m} (2m-1) P^{2(m-1)(2m-1)}.$$

Avuto riguardo alla (16), ciò dimostra il teor. III (n. 1) per $m \geq 2$; e si verifica poi subito direttamente che la (19) sussiste anche per $m = 1$.

9. Allo scopo di dedurre il teor. IV dalla (19), intercaliamo qui due semplici lemmi.

LEMMA 1°. - Siano $f_1, f_2, \dots, f_r$, $r \geq 2$ forme di grado $p \geq 1$ in r variabili $x_1, x_2, \dots, x_r$, e si designi con φ una qualsiasi forma nelle stesse x , il cui grado verrà denotato con q . Posto (per $i, j = 1, 2, \dots, r$):

$$(20) \quad g_i = \varphi f_i, \quad f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j},$$

fra i determinanti jacobiani

$$(21) \quad F = \det \|f_{ij}\| \quad , \quad G = \det \|g_{ij}\|$$

intercede la relazione

$$(22) \quad G = \frac{p+q}{p} \varphi^r F.$$

Scritto invero per abbreviare

$$\varphi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} ,$$

il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee fornisce intanto

$$(23) \quad \sum_j \varphi_j x_j = q\varphi \quad , \quad pf_i = \sum_l f_{il} x_l$$

ed inoltre, in base alle (20), risulta

$$(24) \quad g_{ij} = \varphi f_{ij} + \varphi_j f_i.$$

Detto poi F_{ij} il complemento algebrico di f_{ij} in F , ed avuto riguardo alle (21), (23), (24), si ricava successivamente:

$$\begin{aligned} G &= \det \|\varphi f_{ij} + \varphi_j f_i\| = \varphi^r F + \varphi^{r-1} \sum_{ij} \varphi_j f_i F_{ij} = \\ &= \varphi^r F + \frac{\varphi^{r-1}}{p} \sum_{jl} \varphi_j x_l \sum_i f_{il} F_{ij} = \varphi^r F + \frac{\varphi^{r-1}}{p} \left(\sum_j \varphi_j x_j \right) F = \varphi^r F \left(1 + \frac{q}{p} \right), \end{aligned}$$

e quindi appunto la (22).

LEMMA 2°. — *Detta f una forma di grado $s \geq 2$ in $r \geq 2$ variabili $x_1, x_2, \dots, x_r$, si ponga*

$$(25) \quad g = f^k$$

(con $k \geq 2$ intero), e si denotino con H_f, H_g gli hessiani di f, g . Sussiste allora l'identità:

$$(26) \quad H_g = \frac{ks-1}{s-1} k^r f^{(k-1)r} H_f.$$

Infatti la (25) viene ad implicare le prime equazioni (20), ove si assuma:

$$\varphi = kf^{k-1} \quad , \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad g_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Basta quindi applicare la (22) nelle ipotesi attuali [per le quali risulta $p = s-1$, $q = s(k-1)$], per ottenere la (26).

10. Ritornando alle considerazioni dei nn. 7, 8, possiamo usufruire del lemma 2° in relazione alla (16), assunta quale caso particolare della (25). Attualmente le x vengono dunque ad identificarsi con gli $m(2m-1)$ elementi (II), talché $r = 2m^2 - m$; inoltre $k = 2$, $g = A$, ed $f = P$ ha grado $s = m$ in detti elementi. Pertanto la (26) fornisce:

$$H_A = \frac{2m-1}{m-1} 2^{2m^2-m} P^{2m^2-m} H_P.$$

Basta ora confrontare quest'ultima relazione con la (19), per ricavare la formula che appare al n. 1 col teor. IV.