Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Dente, Giuseppe Allegra

Influenza di una reazione chimica omogenea sui coefficienti di scambio termico. Parte II: Moto laminare con distribuzione di velocità triangolare

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.1-2, p. 63–69.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_1-2_63_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Fisica. — *Influenza di una reazione chimica omogenea sui coefficienti di scambio termico.* Parte II [*]: *Moto laminare con distribuzione di velocità triangolare* [**]. Nota [***] di MARIO DENTE e GIUSEPPE ALLEGRA, presentata dal Socio G. NATTA.

Le premesse generali a questo caso e le diverse ipotesi sono le stesse presentate per il caso precedente (vedi Parte I) [*].

Ora però si considera il movimento su un piatto piano indefinito con distribuzione triangolare delle velocità. Come è noto tale approssimazione porta, nel caso di assenza della reazione chimica, alla soluzione di Leveque (che si può considerare una soluzione asintotica del problema del condotto circolare con moto laminare alla Poiseuille per « bassi » valori del parametro X/L Pè). D'altra parte è proprio in questa zona di valori X/L Pè che maggiormente si risentirà l'influenza dei fenomeni che qui vogliamo considerare, come è evidente. Consideriamo dunque ancora le equazioni differenziali fondamentali per tale problema:

$$
(1)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{\textit{Bilancio termico}} \\
\multicolumn{3}{l}{\rho c_p u \dfrac{\partial t}{\partial X} = k \dfrac{\partial^2 t}{\partial Y^2} - QR} \\
\multicolumn{3}{l}{\textit{Bilancio materiale}} \\
\multicolumn{3}{l}{u \dfrac{\partial c}{\partial X} = D \dfrac{\partial^2 c}{\partial Y^2} - R} \\
\multicolumn{3}{l}{\textit{Condizioni al contorno}} \\
X = 0 & t = t_0 & c = c_0 \\
Y = 0 & \left(\dfrac{\partial c}{\partial Y}\right)_w = 0 & t = t_w(X) \\
Y = \infty & & c\,,t = \text{limitati.}
\end{array}\right.
$$

Essendo per ipotesi

$$u = mY \qquad m = \text{costante}$$

ritenuto ancora $D = \dfrac{k}{\rho c_p}$ ed eseguite le seguenti posizioni:

$$y = \frac{Y}{L} \qquad x = \frac{kX}{\rho c_p m L^3} = \frac{DX}{mL^3}$$

$$\frac{L^2 R}{D} = r \qquad q = \frac{Q}{\rho c_p} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Per moto in tubi circolari} \\ m = \dfrac{4\bar{u}}{L}\end{array}\right]$$

$$C = c_0 - c \qquad T = t - t_0$$

(*) La Parte I di questo lavoro è stata pubblicata nel Volume *Alta Tecnologia Chimica* (V Corso Estivo di Chimica della Fondazione Donegani – Varese 26 settembre – 8 ottobre 1960) edito dall'Accademia Nazionale dei Lincei.

(**) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico, Milano.

(***) Nota pervenuta all'Accademia il 16 luglio 1964.

si ottiene il sistema seguente:

$$(2) \qquad \begin{cases} y \dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} + r \\ y \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} - qr \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} x = 0 & C = T = 0 \\ y = 0 & \left(\dfrac{\partial C}{\partial y}\right)_w = 0 \quad ; \quad T = T_w(x) \\ y = \infty & C, T \text{ limitati.} \end{cases}$$

Fatte sulla funzione $r(C, T)$ le stesse ipotesi della Parte I si avrà ovviamente:

$$(3) \qquad \begin{cases} y \dfrac{\partial C}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} + r_0 + AT - BC \\ y \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} - qr_0 - qAT + qBC. \end{cases}$$

Posto poi:

$$\gamma = q \frac{C}{T_{w_0}} \quad , \quad T^* = \frac{T}{T_{w_0}}$$

dove T_{w_0} è un valore di riferimento di $T_w(x)$ il sistema (3) si trasforma nel seguente:

$$(4) \qquad \begin{cases} y \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + \dfrac{qr_0}{T_{w_0}} - B\gamma + qAT^* \\ y \dfrac{\partial T^*}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - \dfrac{qr_0}{T_{w_0}} + B\gamma - qAT^*. \end{cases}$$

Introducendo le seguenti trasformate:

$$(5) \qquad \Gamma(s, y) = \int_0^\infty e^{-sx} \gamma \, dx$$

$$(6) \qquad \theta(s, y) = \int_0^\infty e^{-sx} T^* \, dx$$

$$(7) \qquad \theta_w(s) = \int_0^\infty e^{-sx} T_w^* \, dx$$

il sistema (4) diventa, tenendo conto anche delle condizioni per $x = 0$:

$$(8) \qquad \begin{cases} sy\Gamma = \dfrac{d^2 \Gamma}{dy^2} + \dfrac{qr_0}{T_{w_0} s} - B\Gamma + qA\theta \\ sy\theta = \dfrac{d^2 \theta}{dy^2} - \dfrac{qr_0}{T_{w_0} s} + B\Gamma - qA\theta \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} y = 0 \, ; \left(\dfrac{d\Gamma}{dy}\right)_w = 0 \, , \, \theta = \theta_w(s) \\ y = \infty \, ; \Gamma, \theta = \text{limitati.} \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni si ottiene la seguente:

$$\frac{d^2(\Gamma+\theta)}{dy^2} - sy(\Gamma+\theta) = 0. \tag{9}$$

La soluzione generale della (9) è, come è noto:

$$\Gamma + \theta = y^{1/2}\,D(s)\,J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}s^{1/2}e^{i\pi/2}y^{3/2}\right) + y^{1/2}\,E(s)\,J_{1/3}\left(\frac{2}{3}s^{1/2}e^{i\pi/2}y^{3/2}\right) = y^{1/2}\,Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}s^{1/2}e^{i\pi/2}y^{3/2}\right) \tag{10}$$

dove con D, E si sono indicate due costanti da determinarsi, e con $Z_{1/3}$ la combinazione lineare delle $J_{\pm 1/3}$ (funzioni di Bessel di ordini $\pm 1/3$).

La sostituzione della (10) nella prima delle (8) fornisce:

$$\frac{d^2\Gamma}{dy^2} - (sy+qA+B)\,\Gamma = -\frac{qr_0}{Tw_0 s} - qAy^{1/2}Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}s^{1/2}e^{i\pi/2}y^{2/3}\right) = g(y,s). \tag{11}$$

La risoluzione della (11), come è noto, richiede anzitutto la risoluzione della equazione cosidetta «omogenea associata»:

$$\frac{d^2\Gamma_0}{dy^2} - (sy+qA+B)\,\Gamma_0 = 0 \tag{12}$$

che porta alla soluzione generale:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= F(s)\,e^{i\pi/2}(sy+qA+B)^{1/2}\,J_{-1/3}\left[\frac{2}{3s}e^{i\pi/2}(sy+qA+B)^{3/2}\right] + \\ &+ G(s)\,e^{i\pi/2}(sy+qA+B)^{1/2}\,J_{1/3}\left[\frac{2}{3s}e^{i\pi/2}(sy+qA+B)^{3/2}\right] = \\ &= F(s)\,Y_1 + G(s)\,Y_2\end{aligned} \tag{13}$$

dove Y_1 Y_2 sono i due integrali particolari della (12).

Alla soluzione Γ_0, allo scopo di trovare la soluzione generale della (11), va aggiunto un integrale particolare della (11) stessa. Tale integrale particolare si ottiene, per esempio, con il metodo di variazione del parametro e risulta, come è facile constatare:

$$\Omega(s,y) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}\,s}\left\{Y_1\int_0^y g(y,s)\,Y_2\,dy - Y_2\int_0^y g(y,s)\,Y_1\,dy\right\}. \tag{14}$$

Risulta quindi completamente determinata la soluzione generale del sistema (8):

$$\left\{\begin{aligned}\Gamma &= \Gamma_0 + \Omega \\ \theta &= y^{1/2}Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}s^{1/2}e^{i\pi/2}y^{3/2}\right) - \Gamma_0 - \Omega.\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Le costanti di integrazione (D, E, F, G) sono contenute implicitamente nella (15) ed ora vanno determinate mediante le condizioni al contorno.

Trascurando i laboriosi passaggi intermedi, tenendo conto delle condizioni per Γ, θ ad $y = 0$, $y = \infty$, si trova:

$$
(16) \quad \left\{
\begin{aligned}
& D = - e^{-i\pi/3} E \\
& F + e^{i\pi/3} G = \frac{2}{3s} e^{2i\pi/3} \int_0^\infty g(y, s) (sy + qA + B)^{1/2} k_{1/3} \left[\frac{2}{3s} (sy + qA + B)^{3/2} \right] dy \\
& F J_{2/3} \left[\frac{2}{3s} e^{i\pi/2} (qA + B)^{3/2} \right] = G J_{-2/3} \left[\frac{2}{3s} e^{i\pi/2} (qA + B)^{3/2} \right] \\
& \theta_w(s) = - \frac{3^{1/3} s^{-1/6}}{(-1/3)!} E(s) e^{i\pi/6} - \Gamma(y = 0).
\end{aligned}
\right.
$$

Elaborando le (16) si arriva a determinare i valori di D, E, F, G. Quella che a noi interessa per i successivi sviluppi è soprattutto l'espressione per $E(s)$, e quindi scriviamo solo questa:

$$
(17) \qquad E(s) e^{i\pi/6} =
$$

$$
= \frac{\dfrac{qr_0}{T_{w_0} s} \displaystyle\int_0^\infty (sy + qA + B)^{1/2} k_{1/3} \left[\frac{2}{3s} (sy + qA + B)^{3/2} \right] dy - (qA + B) \theta_w k_{2/3} \left[\frac{2}{3s} e^{i\pi/2} (qA + B)^{3/2} \right]}{- \dfrac{\sqrt{3}}{\pi} qA \displaystyle\int_0^\infty y^{1/2} (sy + qA + B)^{1/2} k_{1/3} \left(\frac{2}{3} s^{1/2} e^{i\pi/2} y^{3/2} \right) dy + \frac{3^{1/3}}{(-1/3)! \, s^{1/6}} (qA + B) k_{2/3} \left[\frac{2}{3s} e^{i\pi/2} (qA + B)^{3/2} \right]} .
$$

Per il calcolo del coefficiente di scambio termico interessa la grandezza

$$
\left(\frac{d\theta}{dy} \right)_{y=0} = \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_w .
$$

È facile constatare tenendo conto delle relazioni precedenti che

$$
(18) \qquad \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_w = \frac{E(s) e^{i\pi/6} s^{1/6} 3^{2/3}}{(-2/3)!} .
$$

Data l'espressione (17) della $E(s)$ è ovvio che la trasformazione inversa della espressione (18) non è immediata. D'altra parte, sia perché gli effetti che stiamo studiando hanno la loro più efficace influenza per bassi valori di x, sia perché le stesse approssimazioni delle quali soffrono per avvicinarsi al caso reale le (3) sono giustificate solo per bassi valori di x, riteniamo opportuno (come la teoria delle trasformate di Laplace insegna) ottenere una espressione approssimata della (18) in termini di potenze inverse del parametro complesso s. Tale determinazione, per quanto concettualmente semplice è alquanto laboriosa. Di essa riportiamo solo il risultato finale, che è il seguente se si suppone che $T_w(X) \equiv T_{w_0} =$ costante:

$$
\begin{aligned}
(19) \quad \left(\frac{d\theta}{dy} \right)_w = & - 0{,}7258 \frac{1}{s^{2/3}} \left\{ 1 + 1{,}418 \frac{qA}{s^{2/3}} + qA \frac{1{,}3625\, qA - 0{,}6482\, B}{s^{4/3}} + \right. \\
& \left. + qA \frac{1{,}2072 (qA)^2 + 0{,}5506\, qAB + 1{,}1943\, B^2}{s^2} + \cdots \right\} - \\
& - 0{,}9431 \frac{qr_0}{T_w s^{4/3}} \left\{ 1 + \frac{0{,}3576\, qA - 1{,}0604\, B}{s^{2/3}} + \right. \\
& \left. + \frac{0{,}9325 (qA)^2 - 0{,}1046\, qAB + 1{,}0736\, B^2}{s^{4/3}} + \cdots \right\} .
\end{aligned}
$$

Nella espressione (19) si tratta ora di invertire la trasformata. Risulta, tenendo anche conto delle posizioni iniziali:

$$(20)\qquad -\frac{1}{T_w}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \frac{0{,}536}{x^{1/3}}\{1 + 2{,}1429\, qA x^{2/3} + qA\,(1{,}845\, qA - 0{,}878\, B)\, x^{4/3} + $$
$$+ qA\,[1{,}087\,(qA)^2 + 0{,}4957\,(qAB) + 1{,}075\, B^2]\, x^2 + \cdots\} +$$
$$+ \frac{qr_0}{T_w}\{1{,}051\, x^{1/3} + (0{,}3373\, qA - B)\, x + [0{,}5847\,(qA)^2 - 0{,}0656\,(qAB) +$$
$$+ 0{,}6732\, B^2]\, x^{5/3} + \cdots\}.$$

Ora è ovviamente, in questo caso:

$$(21)\qquad -k\left(\frac{\partial t}{\partial Y}\right)_w = -\frac{k}{L}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = hT_w\,.$$

La (21) si può assumere come definizione del coefficiente di scambio termico locale h. Dalla (21) si ricava:

$$(22)\qquad \mathrm{Nu} = \frac{hL}{k} = -\frac{1}{T_w}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w \qquad (= \text{formula } 20).$$

Anche in questo caso il rapporto significativo è il seguente:

$$(23)\qquad \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Nu}_0} = \frac{h}{h_0} = \frac{\mathrm{Nu}\left(qA\,,\, B\,,\, \dfrac{qr_0}{T_w}\right)}{\mathrm{Nu}\left(qA = B = \dfrac{qr_0}{T_w} = 0\right)} = \frac{\mathrm{Nu}}{0{,}536\, x^{-1/3}}\,.$$

Nelle Tabelle I, II e III sono rappresentati alcuni valori di h/h_0, al variare di qA , B , qr_0/T_w .

TABELLA I (*).

$B = 0$.

qr_0/T_w	qA	$x = 10^{-4}$	10^{-3}	10^{-2}
10	10	1,09	1,44	3,70
10	1	1,05	1,22	2,03
1	10	1,05	1,25	2,60

(*) Il parametro x di questa seconda parte non può essere direttamente confrontato con l'analogo della parte I. Qualora si consideri l'approssimazione di Leveque per il moto alla Poiseuille è possibile stabilire un confronto essendo allora $m = \frac{4u}{L}$. Ovviamente dunque detta x_T l'ascissa corrispondente a questo caso x_P l'ascissa corrispondente al caso « plug-flow », si ha $x_T = x_P/4$. Se perciò si vuole ragionare a parità di parametro x occorre confrontare ad esempio i valori per $x_P = 4 \cdot 10^{-2}$ della I Parte con i valori per $x_T = 10^{-2}$ della II Parte. Si vede che il caso di profilo triangolare di velocità ha comunque valori più elevati di h/h_0: quindi l'influenza del profilo di velocità su questi fenomeni è determinata.

TABELLA II.

B = 1.

qr_0/T_w	qA	$x = 10^{-4}$	10^{-3}	10^{-2}
10	10	1,09	1,43	3,52
10	1	1,05	1,22	2,00
1	10	1,05	1,25	2,6

TABELLA III.

B = 10.

qr_0/T_w	qA	$x = 10^{-4}$	10^{-3}	10^{-2}
10	10	1,09	1,41	3,35
10	1	1,05	1,20	1,75
1	10	1,05	1,25	2,57

È facile constatare come le variazioni di B non influenzino mai in modo notevole i valori di h/h_0, che dipendono in modo prevalente da qA, qr/T_w.

Si nota anche che l'entità del rapporto h/h_0 può essere notevolmente diversa da 1. Si potrebbe poi ripetere nel caso in questione quanto già detto nella prima parte sulle diversità di comportamento tra reazioni esotermiche e reazioni endotermiche.

CONCLUSIONI.

La presenza di reazioni chimiche (in particolare se endotermiche) in un fluido omogeneo può alterare sensibilmente i coefficienti di scambio termico. Inoltre il confronto con i risultati ottenuti nella I Parte di questo lavoro [1] (velocità uniforme), mostra che la distribuzione di velocità in vicinanza della parete del condotto condiziona in modo determinante il fenomeno studiato.

SIMBOLOGIA

A , B = coefficienti di linearizzazione della funzione r (C , T)
C = $C_0 - C$
C = concentrazione
C_0 = concentrazione all'ingresso del condotto
c_p = calore specifico del fluido
D = diffusività
k = conducibilità termica
L = raggio del condotto (o lunghezza di riferimento)
Q = entalpia di reazione
q = $Q/\rho c_p$
R = velocità di reazione
r = $L^2 R/D$
r_0 = $r(T_0, C_0)$
S = variabile complessa della trasformazione di Laplace
t = temperatura
t_0 = temperatura all'ingresso del condotto
T = $t - t_0$
T* = T/T_{w_0}
u = velocità del fluido
$\bar{u}$ = velocità media del fluido nel condotto
W = indice per grandezze valutate sulla parete del condotto
X = ascissa longitudinale
Y = distanza dalla parete del condotto
x = XD/mL^3
y = Y/L
γ = $q \dfrac{C}{T_{w_0}}$
$\Gamma(s, y)$ = trasformata di Laplace di γ
$\theta(s, y)$ = trasformata di Laplace di T*
$\theta_w(s)$ = trasformata di Laélace di T^*_w
ρ = densità del fluido.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. DENTE, *Influenza di una reazione chimica omogenea sui coefficienti di scambio termico*, Accademia Nazionale dei Lincei, Fondazione Donegani, Fascicolo « Alta Tecnologia Chimica » V° Corso Estivo di Chimica.