
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CLAUDIO MARGAGLIO

Considerazioni sulle somme dirette di fasci algebrici coerenti di rango uno

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 37 (1964), n.1-2, p. 52-57.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_1-2_52_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *Considerazioni sulle somme dirette di fasci algebrici coerenti di rango uno*^(*). Nota ^(**) di CLAUDIO MARGAGLIO, presentata dal Socio B. SEGRE.

INTRODUZIONE. — Sia V una varietà affine irriducibile sopra un corpo K commutativo algebricamente chiuso ed $\mathfrak{A}$ il fascio degli anelli locali di V . Sia $\mathfrak{N}$ un fascio algebrico coerente liscio (= privo di torsione) su V , localmente isomorfo ad un fascio $\mathfrak{N}'$ somma diretta di fasci coerenti di ideali. Il prof. M. Baldassarri mi ha proposto di accertare se in queste ipotesi il fascio $\mathfrak{N}$ risulta anche globalmente isomorfo ad un fascio somma diretta di fasci coerenti di ideali. Ho affrontato la questione con le ulteriori ipotesi che V soddisfi alla P. E. (= proprietà di estensione, cfr. [1], [2]) e che i fasci $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ siano sottofasci ammissibili di un fascio $\mathfrak{A}'$ (cioè che il supporto dei quozienti $\mathfrak{A}'/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{A}'/\mathfrak{N}'$ abbia codimensione > 1): se la varietà V è normale ed inoltre tale che ogni fascio algebrico coerente localmente libero su V sia libero, allora la seconda di queste ipotesi non è restrittiva (cfr. l'osservazione del n. 1).

Considerato dunque un sottofascio ammissibile $\mathfrak{N}$ di $\mathfrak{A}'$, è risultato che se $\mathfrak{N}$ è localmente isomorfo ad un fascio somma diretta di fasci coerenti di ideali *fra loro isomorfi* allora ciò accade anche globalmente; d'altro canto, ho costruito un esempio di fascio algebrico coerente su K^4 localmente isomorfo ad un fascio del tipo $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{J}$ (con $\mathfrak{J}$ fascio coerente di ideali) ma globalmente irriducibile per somma diretta.

I. LEMMA I. — *Sia R un anello commutativo con unità e si consideri il sottomodulo (unitario) $M = I^s$ ⁽¹⁾ di R^s (s intero positivo, I ideale di R). Per ogni R -omomorfismo $\varphi: R^s \rightarrow R^s$ si ha allora:*

$$\varphi(M) \subseteq M$$

e per ogni R -isomorfismo $\Psi: R^s \rightarrow R^s$ si ha:

$$\Psi(M) = M.$$

Dimostrazione. — Sia $f = (f_1, \dots, f_s) \in M = I^s$ e sia $\varphi: R^s \rightarrow R^s$ rappresentato da una certa matrice $\|a_{ik}\|$. Allora è: $\varphi(f) = (\sum_k a_{1k} f_k, \dots, \sum_k a_{sk} f_k)$ ed ovviamente risulta $\sum_k a_{ik} f_k \in I$ e quindi $\varphi(f) \in M$. Dunque $\varphi(M) \subseteq M$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 6 luglio 1964.

(1) Con una notazione del tipo $N = \sum_i I_i$ si indica quel sottomodulo N di $R^s = \sum_i R_i$, ($R_i = R$), che ha per elementi tutti e soli quelli del tipo $(a_1, \dots, a_s)$ con $a_i \in I_i \subseteq R_i$, ($i = 1, \dots, s$); se per ogni i è $I_i = I$ si scriverà semplicemente $N = I^s$.

Se poi Ψ è un R -isomorfismo e se Ψ' è il suo inverso, si ha anche $M \supseteq \Psi'(M)$ e quindi $\Psi(M) \supseteq \Psi(\Psi'(M)) = M$ e ne segue $\Psi(M) = M$.

PROPOSIZIONE 1. — *Siano $\mathfrak{N}$ ed $\mathfrak{U} = \mathfrak{I}^s$ fasci algebrici coerenti su V , sottofasci ammissibili ⁽²⁾ di $\mathfrak{A}$, fra loro localmente isomorfi (essendo V varietà affine irriducibile soddisfacente alla P. E. (cfr. [1], [2]), ed essendo $\mathfrak{I}$ un fascio coerente di ideali). Allora $\mathfrak{N}$ è isomorfo ad $\mathfrak{U}$ (ed anzi è $\mathfrak{N} = \mathfrak{U}$).*

Dimostrazione. — Per ipotesi vi è per ogni $(x) \in V$ un isomorfismo $\Psi_x: \mathfrak{U}_x \rightarrow \mathfrak{N}_x$ ed essendo $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ (oltreché coerenti) sottofasci ammissibili di $\mathfrak{A}^s$, esiste un isomorfismo $\Psi_x^*: \mathfrak{A}_x^s \rightarrow \mathfrak{A}_x^s$ che estende Ψ_x .

Infatti, (per la coerenza di $\mathfrak{U}$), $\Psi_x: \mathfrak{U}_x \rightarrow \mathfrak{N}_x$ si estende ad un omomorfismo $\Psi: \mathfrak{U}|U \rightarrow \mathfrak{N}|U$, essendo $U = D(Q)$ un opportuno intorno di (x) , costituito con i punti di V ove non è nulla una certa applicazione regolare $Q: V \rightarrow K$. Per un opportuno intero positivo n si ottiene allora un omomorfismo ⁽³⁾ $(Q^n \cdot \Psi): \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{N}$ e poiché $\mathcal{H}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^s, \mathfrak{A}^s) \in P. E.$ (cfr. [1], [2]), ed $\mathfrak{U}$ è sottofascio ammissibile di $\mathfrak{A}^s$, l'omomorfismo $(Q^n \cdot \Psi)$ risulta indotto da un omomorfismo $(Q^n \cdot \Psi)^*: \mathfrak{A}^s \rightarrow \mathfrak{A}^s$. L'isomorfismo Ψ_x^* di cui sopra si ottiene allora con $\Psi_x^* = (1/Q^n) \cdot (Q^n \Psi_x)^*$.

In base al lemma 1 risulta allora che per ogni $(x) \in V$ è $\Psi_x^*(\mathfrak{U}_x) = \mathfrak{U}_x$ e pertanto $\mathfrak{N}_x = \Psi_x^*(\mathfrak{U}_x) = \mathfrak{U}_x$ ed $\mathfrak{N} = \mathfrak{U}$.

OSSERVAZIONE. — Sia V anche normale e tale che ogni fascio algebrico coerente localmente libero su V risulti libero. Sia $\mathfrak{N}$ fascio algebrico coerente su V , localmente isomorfo ad un fascio $\mathfrak{U} = \bigoplus_i \mathfrak{I}_i$ ($\mathfrak{I}_i$ fascio coerente di ideali per ogni i).

Risulta allora che $\mathfrak{N}$ è isomorfo ad un sottofascio ammissibile di $\mathfrak{A}^s$.

Infatti: Sia $\overline{\mathfrak{N}}$ soprafascio ammissibile di $\mathfrak{N}$, algebrico coerente liscio e soddisfacente alla P. E. (cfr. [2]). $\overline{\mathfrak{N}}$ risulta allora isomorfo ad un fascio del tipo $\bigoplus_i \mathfrak{L}_i$ (cfr. [3] cor. 1.3.) ove ciascun $\mathfrak{L}_i = \overline{\mathfrak{I}}_i$ è fascio algebrico coerente liscio soddisfacente alla P. E. e si ottiene pertanto (cfr. [3]) da una sequenza esatta del tipo: $0 \rightarrow \mathfrak{L}_i \rightarrow \mathfrak{A}^t \rightarrow \mathfrak{A}^{t-1}$ e quindi (cfr. [1] teor. 7) $\mathfrak{L}_i$ è localmente libero. Pertanto $\overline{\mathfrak{N}}$ è fascio localmente libero su V e per le ipotesi fatte risulta dunque isomorfo ad $\mathfrak{A}^s$.

2. In questo numero (proposizione 2) verrà costruito un esempio di fascio algebrico coerente su K^4 , localmente isomorfo al fascio $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{I}$, con $\mathfrak{I}$ sottofascio di $\mathfrak{A}$ generato dalle due sezioni globali $W, XY - Z(Z + 1)$ (essendo X, Y, Z, W le 4 coordinate in K^4), ma irriducibile (globalmente) per somma diretta.

Per provare l'esempio si premettono due lemmi.

LEMMA 2. — *Sia R un anello commutativo con unità e sia dato un R -isomorfismo $\Psi: R^s \rightarrow R^s$ tale che l'immagine $\Psi(M)$ del sottomodulo $M = \bigoplus_i I_i$ (I_i ideale di R) sia il sottomodulo $N = \bigoplus_i J_i$ ⁽¹⁾ (J_i ideale di R). Allora è necessariamente:*

$${}^s \cap_i I_i = {}^s \cap_i J_i \quad , \quad {}^s \cup_i I_i = {}^s \cup_i J_i.$$

(2) Cioè $\text{Supp}(\mathfrak{A}^s/\mathfrak{N})$ e $\text{Supp}(\mathfrak{A}^s/\mathfrak{U})$ hanno codimensione > 1 .

(3) Tale che per ogni $(x) \in U$ sia $(Q^n \cdot \Psi)(f_x) = (Q^n \cdot \Psi(f_x))$.

Dimostrazione. - Poniamo $I' = \bigcap_i I_i$, $I'' = \bigcup_i I_i$, $J' = \bigcap_i J_i$, $J'' = \bigcup_i J_i$.

Le inclusioni: $(I')^s \subseteq M \subseteq (I'')^s$ implicano, operando con Ψ (tenuto conto del lemma 1) le inclusioni:

$$(I')^s \subseteq N \subseteq (I'')^s \text{ e queste implicano che:}$$

$$(I')^s \subseteq (J')^s \quad \text{e} \quad (I'')^s \supseteq (J'')^s.$$

Operando analogamente con l'inverso di Ψ si ottiene in definitiva:

$$(I')^s = (J')^s \quad \text{e quindi} \quad I' = J'.$$

Similmente risulta $I'' = J''$.

COROLLARIO. - Sia V una varietà algebrica affine irriducibile soddisfacente alla P. E. e siano $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}, \mathfrak{H}$ sottofasci ammissibili di $\mathfrak{A}$. Allora se sono isomorfi i due fasci $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{I}, \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{H}$ necessariamente per ogni punto $(x) \in V$ una delle due fibre $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{H}_x$ è isomorfa ad $\mathfrak{A}_x$ e l'altra ad $\mathfrak{I}_x$.

Dimostrazione. - Considerati $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{I}, \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{H}$ ciascuno canonicamente immerso in $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$, si applichi il lemma 2 con riferimento all'automorfismo Ψ' di $\Gamma(V, \mathfrak{A})^2$ indotto dall'isomorfismo $\Psi: \Gamma(V, \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{I}) \rightarrow \Gamma(V, \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{H})$ dato. (Poiché $\mathfrak{I}, \mathfrak{K}, \mathfrak{H}$ sono sottofasci ammissibili di $\mathfrak{A}$ ed $\text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^2) \in \text{P. E.}$, Ψ induce Ψ' ; cfr. [1], [2]).

Risulta allora ⁽⁴⁾

$$\Gamma(V, \mathfrak{A}) \cap \Gamma(V, \mathfrak{I}) = \Gamma(V, \mathfrak{I}) = \Gamma(V, \mathfrak{K}) \cap \Gamma(V, \mathfrak{H}) \quad \text{e}$$

$$\Gamma(V, \mathfrak{A}) \cup \Gamma(V, \mathfrak{I}) = \Gamma(V, \mathfrak{A}) = \Gamma(V, \mathfrak{K}) \cup \Gamma(V, \mathfrak{H}) \quad \text{e quindi:}$$

$\mathfrak{A} \cup \mathfrak{I} = \mathfrak{A} = \mathfrak{K} \cup \mathfrak{H}$ e $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{I} = \mathfrak{I} = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$: di queste due relazioni, essendo per ogni $(x) \in V$, $\mathfrak{A}_x$ anello locale, la prima implica che uno dei due ideali $\mathfrak{K}_x, \mathfrak{H}_x$ coincida con $\mathfrak{A}_x$ ed allora la seconda implica che l'altro sia $\mathfrak{I}_x$.

LEMMA 3. - Sia $R = K[X, Y, Z]$ l'anello dei polinomi a 3 variabili su K e si considerino i due elementi $\varepsilon_1 = (X, Z)$, $\varepsilon_2 = (Z + 1, Y)$ di R^2 . Allora per ogni elemento (P, Q) del sotto- R -modulo di R^2 generato da $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ non è vuoto l'insieme degli zeri comuni a P e Q .

Dimostrazione. - La varietà affine $V = V(XY - Z(Z + 1))$ non ha anello delle coordinate a fattorizzazione unica e da ciò segue che su V esistono fasci algebrici coerenti di rango 1 localmente liberi ma non liberi.

Un siffatto fascio è quel sottofascio $\mathcal{L}$ di $\mathfrak{A}_V (= \text{fascio degli anelli locali di } V)$ che è generato dalle due sezioni globali $\sigma_1 = [X]$, $\sigma_2 = [Z]$ di $\mathfrak{A}_V$, rappresentate dai due polinomi X, Z .

Nota: poiché $[X][Y] = [Z][Z + 1]$ si ha $[Y]\sigma_1 = [Z + 1]\sigma_2$ e quindi nei punti di V appartenenti al chiuso $V(Z)$ la fibra $\mathcal{L}_x$ è generata da $\sigma_{1,x}$ e nei rimanenti è generata da $\sigma_{2,x}$ (che risulta invertibile per ogni $(x) \notin V(Z)$).

(4) Le operazioni $\cap$ e $\cup$ si eseguono avendo canonicamente incluso i moduli in questione al modulo $\Gamma(V, \mathfrak{A})$.

Le fibre $\mathcal{L}_x$ sono sottomoduli propri di $\mathcal{A}_{V,x}$ esattamente per i punti $(x) \in V(X) \cap V(Z)$ e si può verificare che ogni sottofascio di $\mathcal{A}_V$ del tipo $P \cdot \mathcal{A}_V$ (con P polinomio nullo in ogni punto di $V(X) \cap V(Z)$) è sottofascio proprio di $\mathcal{L}$.

Sia $\mathcal{T} = \mathcal{L}^{K^3}$ il fascio algebrico coerente su K^3 ottenuto estendendo banalmente $\mathcal{L}$ a K^3 . $\mathcal{T}$ è allora generato dalle due sezioni globali σ_1^*, σ_2^* ottenute estendendo banalmente σ_1, σ_2 e pertanto si ha un omomorfismo suriettivo $\varphi: \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{T}$ definito con $\varphi(f, g) = f \cdot \sigma_2^* - g \cdot \sigma_1^*$ al cui nucleo appartengono le sezioni $\varepsilon_1 = [X, Z], \varepsilon_2 = [Z + 1, Y]$ di $\mathcal{A}^2$.

Da ciò seguirà immediatamente l'asserto, non appena avremo verificato che se $\mathcal{U}_c(\varphi)$ contenesse una sezione $\varepsilon = [P, Q]$ con $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$ ne seguirebbe che $\mathcal{T}$ è $\mathcal{A}$ -modulo generabile con una sezione globale e che $\mathcal{L}$ di conseguenza è $\mathcal{A}_V$ -modulo libero.

Si ha in effetti: se una siffatta sezione ε comparisse in $\mathcal{U}_c(\varphi)$, definito l'omomorfismo $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{U}_c(\varphi)$ con $\gamma(1) = \varepsilon$ si potrebbe costruire il seguente diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{U}_c(\varphi) & \longrightarrow & \mathcal{A}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{T} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \Psi & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{T} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

avendo definito $\Psi(f, g) = Qf - Pg$.

La sezione $\alpha(1)$ genererebbe allora $\mathcal{T}$ come $\mathcal{A}$ -modulo.

(Osservazione: in particolare risulta $\mathcal{I} \approx \mathcal{A}$).

PROPOSIZIONE 2. — *Sia $\mathcal{F}$ il sottofascio di $\mathcal{A}^2$ (definito su K^4) generato dalle quattro sezioni globali: $\omega_1 = (X, Z), \omega_2 = (Z + 1, Y), \omega_3 = (W, 0), \omega_4 = (0, W)$ e sia $\mathcal{I}$ il sottofascio di $\mathcal{A}$ generato dalle due sezioni globali $W, X \cdot Y - Z \cdot (Z + 1)$. Risulta allora:*

- $\mathcal{F}$ è localmente isomorfo al fascio $\mathcal{A} \oplus \mathcal{I}$;
- $\mathcal{F}$ è irriducibile per somma diretta.

Dimostrazione:

PARTE a) I due omomorfismi $\varphi_1': \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}, \varphi_2': \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ definiti con:

$\varphi_1'(f, g) = f, \varphi_2'(f, g) = g$ forniscono, ristretti ad $\mathcal{F}$, due omomorfismi

$\varphi_1: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}, \varphi_2: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$ aventi entrambi nucleo isomorfo ad $\mathcal{I}$.

(Infatti ad esempio per quanto riguarda $\mathcal{U}_c(\varphi_1)$ si ha: tutte e sole le sezioni globali di $\mathcal{U}_c(\varphi_1)$ si ottengono con $P_1 Z + P_2 \cdot Y + P_4 \cdot W$ essendo P_1, P_2, P_3, P_4

quattro polinomi tali che $P_1 \cdot X + P_2 \cdot (Z + 1) + P_3 \cdot W = 0$ e si verifica che di conseguenza $\mathcal{O}_C(\varphi_1)$ è generato dalle due sezioni globali di $\mathcal{A}^2 : (O, W), (O, X \cdot Y - Z \cdot (Z + 1))$.

La prima parte della proposizione 2 segue allora dal fatto che fuori di $V(Z + 1)$ è suriettivo φ_1 e fuori di $V(Z)$ è suriettivo φ_2 .

PARTE b) Anzitutto osserviamo che se $\mathcal{F}$ è isomorfo ad un fascio del tipo $\mathcal{I} \oplus \mathcal{K}$ (con $\mathcal{I}, \mathcal{K}$ fasci di ideali) allora necessariamente uno dei due fasci $\mathcal{I}, \mathcal{K}$ è isomorfo ad $\mathcal{A}$ e l'altro ad $\mathcal{I}$. Infatti:

sia, se possibile, $\mathcal{F}$ isomorfo ad $\mathcal{K} \oplus \mathcal{I}$ con $\mathcal{K}, \mathcal{I}$ non l'uno isomorfo ad $\mathcal{A}$ e l'altro ad $\mathcal{I}$. Allora, poiché in base al corollario del lemma 2 (applicato ad aperti affini di K^4) risulta in particolare che in ogni punto $(x) \in V(\mathcal{I}) = V(W) \cap V(XY - Z(Z + 1))$ dei due $\mathcal{A}_x$ -moduli $\mathcal{I}_x, \mathcal{K}_x$ uno dev'essere isomorfo ad $\mathcal{A}_x$ e l'altro ad $\mathcal{I}_x$, ne segue, poiché d'altra parte fuori di $V(\mathcal{I})$ è $\mathcal{I}_x \approx \mathcal{K}_x \approx \mathcal{I}_x \approx \mathcal{A}_x$ (giacché ivi $\mathcal{F}_x = \mathcal{A}_x^2$), che esistono due punti distinti $(x_1), (x_2)$ di $V(\mathcal{I})$ tali che $\mathcal{I}_{x_1} \approx \mathcal{A}_{x_1}, \mathcal{K}_{x_1} \approx \mathcal{I}_{x_1}$ e $\mathcal{I}_{x_2} \approx \mathcal{I}_{x_2}, \mathcal{K}_{x_2} \approx \mathcal{A}_{x_2}$. Ciascuna di queste relazioni induce relazioni analoghe per ogni punto (x) di tutto un intorno rispettivamente di (x_1) e (x_2) e poiché $V(\mathcal{I})$ è chiuso irriducibile ciò implica che in qualche punto (x_3) di $V(\mathcal{I})$ si abbia $\mathcal{I}_{x_3} \approx \mathcal{K}_{x_3} \approx \mathcal{I}_{x_3}$ ed ivi risulterebbe $\mathcal{F}_{x_3} \approx \mathcal{I}_{x_3} \oplus \mathcal{I}_{x_3}$ fibra che non è isomorfa ad $\mathcal{I}_{x_3} \oplus \mathcal{A}_{x_3}$ (giacché $\mathcal{I}_{x_3} \cup \mathcal{I}_{x_3} = \mathcal{I}_{x_3}$ e $\mathcal{I}_{x_3} \cup \mathcal{A}_{x_3} = \mathcal{A}_{x_3}$ [cfr. lemma 2]).

Dunque: se $\mathcal{F}$ fosse riducibile per somma diretta, dovrebbe essere $\mathcal{F} \approx \mathcal{I} \oplus \mathcal{A}$. Escludiamo ora anche questa possibilità.

$\mathcal{F} \approx \mathcal{I} \oplus \mathcal{A}$ implicherebbe l'esistenza di una sequenza esatta su K^4 , del tipo:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

e poiché fuori dal chiuso (di codimensione > 1) $V(\mathcal{I})$ di K^4 è $\mathcal{F}_x = \mathcal{A}_x^2$, l'omomorfismo φ indurrebbe un omomorfismo $\varphi' : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$ tale che $\varphi' | \mathcal{F} = \varphi$. Da ciò seguirebbe che:

$$\varphi(f, g) = Pf + Qg \quad \text{con } P, Q \text{ polinomi.}$$

Proveremo allora che le quattro sezioni globali di $\mathcal{A} : \varphi(\omega_i), (i = 1, \dots, 4)$ non generano $\mathcal{A}$ (e da ciò seguirà che non esiste alcun omomorfismo suriettivo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}$).

Infatti, se esistessero quattro polinomi $P_i (i = 1, 2, 3, 4)$ di $K[X, Y, Z, W]$ tali che $S = \sum_i P_i \varphi(\omega_i) - 1 = 0$, proiettando il polinomio S in $K[X, Y, Z]$ mediante l'omomorfismo di K -algebre: $K[X, Y, Z, W] \xrightarrow{\beta} K[X, Y, Z]$ definito con $\beta(X) = X, \beta(Y) = Y, \beta(Z) = Z, \beta(W) = 0$, si constatarebbe che esistono due polinomi $\bar{P}_1 = \beta(P_1), \bar{P}_2 = \beta(P_2)$ di $K[X, Y, Z]$ tali che:

$\bar{P}_1 \beta \varphi(\omega_1) + \bar{P}_2 \beta \varphi(\omega_2) - 1 = 0$ e ciò non può avvenire poiché posto $\bar{P} = \beta(P), \bar{Q} = \beta(Q), \bar{P}, \bar{Q}$ sarebbero polinomi di $K[X, Y, Z]$ tali che:

$\bar{P}_1 (\bar{P} \cdot X + \bar{Q} \cdot Z) + \bar{P}_2 (\bar{P} \cdot (Z + 1) + \bar{Q} \cdot Y) - 1 = 0$ e questo è in contraddizione con il risultato del lemma 3 in base al quale risulta che i due polinomi $\bar{P}_1 \cdot X + \bar{P}_2 \cdot (Z + 1), \bar{P}_1 \cdot Z + \bar{P}_2 \cdot Y$ hanno zeri comuni.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BALDASSARRI M., *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del convegno internazionale di geometria algebrica tenuto a Torino nel maggio 1961.
- [2] MARGAGLIO C., *Una dimostrazione elementare della proprietà di estensione per il fascio degli anelli locali di uno spazio affine ed alcune applicazioni di tale proprietà*. « Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova », XXXIII (1963).
- [3] — *Una caratterizzazione di certi fasci algebrici coerenti ed una ulteriore applicazione della proprietà di estensione*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova » (1964).
- [4] SERRE J. P., *Faisceaux algébriques cohérents*, « Ann. of Math. », 61 (1955).