Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giovanni Prouse

Su un esempio concernente l'equazione delle onde

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.1-2, p. 40–47.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_1-2_40_0>

Analisi matematica. — *Su un esempio concernente l'equazione delle onde* [*]. Nota [**] di GIOVANNI PROUSE, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

Si consideri l'equazione delle onde (in forma operazionale) in un dominio Ω limitato ed in relazione al primo problema misto

$$x''(t) = \mathrm{A}\,x(t) + f(t), \qquad (t \in \mathrm{J} = (-\infty, \infty)) \tag{1}$$

con $f(t)$ *indefinitamente derivabile, uniformemente continua ed a traiettoria relativamente compatta insieme a tutte le sue derivate.*

Faremo vedere che si può prendere $f(t)$ *in modo che le soluzioni della* (I) *risultino limitate in* J *come funzioni a valori nello spazio* E *dell'energia, corrispondente alla norma*

$$\| x(t) \|_{\mathrm{E}} = \{ \| x(t) \|^2_{\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1} + \| x'(t) \|^2_{\mathrm{L}^2} \}^{1/2}, \tag{2}$$

ma che tali soluzioni non siano uniformemente continue e neppure siano dotate di traiettorie relativamente compatte, come funzioni a valori nello spazio E_0 *corrispondente alla norma*

$$\| x(t) \|_{\mathrm{E}_0} = \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \| x(t+\eta) \|^2_{\mathrm{E}}\, d\eta \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Questo risultato (che migliora uno precedentemente ottenuto [1]) può essere messo in relazione con un teorema di compattezza dimostrato da Amerio [2] in un recente lavoro sulle soluzioni quasi-periodiche di equazioni funzionali negli spazi di Hilbert. Esso mostra come l'ipotesi, fatta da Amerio, dell'esistenza di una soluzione limitata la quale sia, inoltre, E_0-uniformemente continua, non può, in generale, essere sostituita dalla sola ipotesi di limitatezza, anche se il termine noto $f(t)$ soddisfa alle condizioni di regolarità indicate per la (I).

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano. Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1963-64.

Durante lo svolgimento di questo lavoro, l'autore ha usufruito di una borsa di studio del C.N.R.

(**) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1964.

(1) G. PROUSE, *Esempi tipici per l'equazione delle onde*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», *34* (1963).

(2) L. AMERIO, *Soluzioni quasi-periodiche di equazioni quasi-periodiche negli spazi hilbertiani*, «Ann. di Mat.», *61* (1963). Cfr. anche L. AMERIO, *Quasi-periodicità degli integrali ad energia limitata dell'equazione delle onde con termine noto quasi-periodico*, Note I, II, III - «Rend. Acc. Naz. Lincei», *28* (1960); in tale Nota viene indicato con $\overset{\circ}{\mathfrak{D}}$ lo spazio da noi chiamato $\overset{\circ}{\mathrm{H}}{}^1$.

Possiamo limitarci a considerare la soluzione della (I) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$x(0) = 0 \quad , \quad x'(0) = 0; \tag{4}$$

essa è data dalla formula:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{\lambda_n} \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n (t - \eta)\, d\eta , \tag{5}$$

dove y_n sono le autosoluzioni dell'operatore A e λ_n i corrispondenti autovalori e si è posto:

$$f_n(t) = (f(t), y_n)_{L^2} \quad , \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n f_n(t) . \tag{6}$$

Gli autovalori soddisfano, come è noto, alle relazioni:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty . \tag{7}$$

Si ha inoltre:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \int_0^t f_n(\eta) \cos \lambda_n (t - \eta)\, d\eta . \tag{8}$$

Posto

$$h_n = [\lambda_n e^{\lambda_n} + 1], \tag{9}$$

scegliamo gli interi positivi k_n in modo che soddisfino alle relazioni

$$k_1 = h_1 \quad , \quad k_{n+1} \geq h_{n+1} + \frac{\lambda_{n+1}}{2\pi} \left(\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi + 2 \right). \tag{10}$$

Dalle (10) segue che, se si considerano sull'asse t i segmenti

$$J_n = \left[\frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \, , \, \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \right], \tag{11}$$

risulta $J_m \cap J_n = 0$ per $m \neq n$ e precisamente:

$$\frac{k_{n+1} - h_{n+1}}{\lambda_{n+1}} 2\pi \geq \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi + 2 \quad , \quad J_n \in [0, \infty) \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{12}$$

Indicata con $\omega(t)$ una funzione ≥ 0 indefinitamente derivabile in J e tale che sia $\omega(t) = 0$ per $t \leq 0$, $\omega(t) = 1$ per $t \geq \pi$, poniamo

$$f_n(t) = \begin{cases} -e^{-\lambda_n} \omega\left(\lambda_n\left(t - \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - t\right)\right) \sin \lambda_n t & \text{per } \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \\ e^{-\lambda_n} \omega\left(\lambda_n\left(t - \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - t\right)\right) \sin \lambda_n t & \text{per } \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ 0 & \text{per } t \notin J_n . \end{cases} \tag{13}$$

Osserviamo che, per le (6), (13), *la funzione* $f(t)$ *così definita risulta indefinitamente derivabile, è uniformemente continua ed ha la traiettoria relativamente compatta insieme con tutte le sue derivate.*

Si ha infatti, per $t \in J$, detta K_p una quantità dipendente solo da p:

$$|f_n^{(p)}(t)| \leq K_p \, e^{-\lambda_n} \lambda_n^p \tag{14}$$

e, di conseguenza, tenendo presente la (7), per $\lambda_s \geq p$:

$$\sum_{n=s}^{\infty} f_n^{(p)}(t)^2 \leq K_p^2 \, e^{-2\lambda_s} \lambda_s^{2p}. \tag{15}$$

Poiché $\lim\limits_{s \to \infty} \lambda_s^{2p} e^{-2\lambda_s} = 0$, le serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(t)^2 = \|f^{(p)}(t)\|_{L^2}^2$ convergono uniformemente in J, per ogni p, e le funzioni $f^{(p)}(t)$ sono quindi uniformemente continue in J ed hanno le traiettorie relativamente compatte.

Consideriamo ora la soluzione della (I) *corrispondente alle condizioni iniziali* (4) *e dimostriamo che essa non è* E_0*–uniformemente continua e non ha la traiettoria* E_0*–relativamente compatta. Faremo, per questo, vedere che la derivata* $x'(t)$, *a valori nello spazio* $L_0^2 = L^2\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; L^2\right)$ (*corrispondente alla norma*

$$\|x'(t)\|_{L_0^2} = \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \|x'(t+\eta)\|_{L^2}^2 \, d\eta \right\}^{1/2} \Bigg) \tag{16}$$

non è uniformemente continua e non ha la traiettoria relativamente compatta

Posto

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos \lambda_n t \int_0^t f_n(\eta) \cos \lambda_n \eta \, d\eta + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \lambda_n t \, \cdot \\ &\cdot \int_0^t f_n(\eta) \sin \lambda_n \eta \, d\eta = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, \psi_n(t) \cos \lambda_n t + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, \varphi_n(t) \, \cdot \\ &\cdot \sin \lambda_n t = v_1(t) + v_2(t), \end{aligned} \tag{17}$$

risulta, per la (13):

$$\psi_n(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_n} \displaystyle\int_{\frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi}^{t} \omega\left(\lambda_n\left(\eta - \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \eta\right)\right) \sin \lambda_n \eta \cos \lambda_n \eta \, d\eta & \\ \qquad\qquad \text{per } \dfrac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi & \\ 0 \qquad\qquad \text{per } t = \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi & \\ -e^{-\lambda_n} \displaystyle\int_{\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi}^{t} \omega\left(\lambda_n\left(\eta - \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - \eta\right)\right) \sin \lambda_n \eta \cos \lambda_n \eta \, d\eta & \\ \qquad\qquad \text{per } \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \dfrac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi & \\ 0 \qquad\qquad \text{per } t \notin J_n & \end{cases} \tag{18}$$

e, tenendo presente che $\int\limits_{J_n} f_n(\eta) \sin \lambda_n \eta \, d\eta = 0$:

$$
(19) \qquad \varphi_n(t) = \begin{cases}
e^{-\lambda_n} \displaystyle\int\limits_{\frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi}^{t} \omega\left(\lambda_n\left(\eta - \frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \eta\right)\right) \sin^2 \lambda_n \eta \, d\eta \\
\qquad\qquad \text{per } \dfrac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\
- e^{-\lambda_n} \displaystyle\int\limits_{\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi}^{t} \omega\left(\lambda_n\left(\eta - \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - \eta\right)\right) \sin^2 \lambda_n \eta \, d\eta \\
\qquad\qquad \text{per } \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \dfrac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \\
0 \qquad\qquad \text{per } t \notin J_n .
\end{cases}
$$

Si ha quindi, per le (18), ricordando la definizione della funzione ω:

$$
(20) \qquad | \psi_n(t) | \leq e^{-\lambda_n} \left\{ \left| \int\limits_{\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi}^{\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{\pi}{\lambda_n}} \omega\left(\lambda_n\left(\eta - \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - \eta\right)\right) \cdot \right.\right.
$$

$$
\cdot \sin \lambda_n \eta \cos \lambda_n \eta \, d\eta \Bigg| + \Bigg| \int\limits_{\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{\pi}{\lambda_n}}^{\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{\pi}{\lambda_n}} \sin \lambda_n \eta \cos \lambda_n \eta \, d\eta \Bigg| +
$$

$$
+ \Bigg| \int\limits_{\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{\pi}{\lambda_n}}^{\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi} \omega\left(\lambda_n\left(\eta - \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\frac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - \eta\right)\right) \sin \lambda_n \eta \, \cdot
$$

$$
\left.\left. \cdot \cos \lambda_n \eta \, d\eta \right| \right\} \leq e^{-\lambda_n} \left(\frac{\pi}{\lambda_n} + \frac{\pi}{\lambda_n} \right) = \frac{2\pi e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} .
$$

Dalla (20) segue, per $t \in J$:

$$
(21) \qquad \left\{ \sum_{n=s}^{\infty} \psi_n^2(t) \cos^2 \lambda_n t \right\}^{1/2} \leq \frac{2\pi e^{-\lambda_s}}{\lambda_s} .
$$

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n^2(t) \cos^2 \lambda_n t = \| v_1(t) \|_{L^2}^2$ converge quindi uniformemente in J e la funzione $v_1(t)$ è perciò L^2–uniformemente continua in J ed ha la traiettoria L^2–relativamente compatta.

Risulta d'altra parte (osservando che è $\varphi_n(t) \leq \varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)$ e tenendo presenti le (9), (19)):

$$(22) \qquad |\varphi_n(t)| \leq \frac{h_n}{\lambda_n e^{\lambda_n}} \pi \leq \frac{\pi}{\lambda_n e^{\lambda_n}} (\lambda_n e^{\lambda_n} + 1) \leq 2\pi$$

per $n \geq n_1$ abbastanza grande.

Osserviamo che, per $t \in \left[\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{h_n}{\lambda_n}\pi, \frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{h_n}{\lambda_n}\pi\right]$, risulta:

$$(23) \qquad \varphi_n(t) \geq \varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{h_n}{\lambda_n}\pi\right) > e^{-\lambda_n} \int_{\frac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{\pi}{\lambda_n}}^{\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \frac{h_n}{\lambda_n}\pi} \sin^2 \lambda_n \eta \, d\eta =$$

$$= \frac{e^{-\lambda_n}}{\lambda_n} \int_{\pi}^{h_n \pi} \sin^2 \xi \, d\xi = \frac{h_n - 1}{\lambda_n e^{\lambda_n}} \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{4}$$

per $n \geq n_2 \geq n_1$ abbastanza grande.

Supponiamo ora di assumere $n \geq n_3 \geq n_2$ tanto grande che risulti:

$$(24) \qquad \frac{1}{2} + \frac{\pi}{\lambda_n} \leq \frac{h_n}{\lambda_n}\pi \quad , \quad \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \lambda_n \eta \, d\eta \geq \frac{1}{4} \cdot$$

Si ha allora, per la (23):

$$(25) \qquad \int_{-1/2}^{1/2} \left[\varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) \sin \lambda_n \left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) - \varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right) \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \sin \lambda_n \left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right)\right]^2 d\eta = \int_{-1/2}^{1/2} \left[\varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) + \varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right)\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \sin^2 \lambda_n \left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right) d\eta \geq 4 \frac{\pi^2}{16} \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \lambda_n \eta \, d\eta \geq \frac{\pi^2}{16} \cdot$$

Dalla (25) segue:

$$(26) \qquad \sup_{t \in J} \int_{-1/2}^{1/2} \left[\varphi_n\left(t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) \sin \lambda_n \left(t + \eta + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) - \varphi_n(t + \eta) \sin \lambda_n (t + \eta)\right]^2 d\eta \geq \frac{\pi^2}{16}$$

e quindi, per $n \geq n_3$

$$(27) \qquad \sup_{t \in J} \left\| v_2\left(t + \frac{\pi}{\lambda_n}\right) - v_2(t) \right\|_{L_0^2}^2 \geq \frac{\pi^2}{16} \cdot$$

Poiché $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{\lambda_n} = 0$, *la funzione* $v_2(t)$, *definita dalla* (17), *non è* L_0^2*–uniformemente continua in* J *e non lo è perciò, per quanto si è sopra dimostrato, neppure la funzione* $x'(t)$.

Facciamo ora vedere che la traiettoria di $v_2(t)$ non è L_0^2–relativamente compatta. Si ha infatti, per $n \geq n_3$, per le (23), (24):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n^2\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right) \sin^2 \lambda_n \left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right) d\eta \geq \frac{\pi^2}{16} \int_{-1/2}^{1/2} \sin^2 \lambda_n \eta \, d\eta \geq \frac{\pi^2}{64} \tag{28}$$

e, di conseguenza, per $s \geq n_3$:

$$\sum_{n=s}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n^2\left(\frac{k_s}{\lambda_s} 2\pi + \eta\right) \sin^2 \lambda_n \left(\frac{k_s}{\lambda_s} 2\pi + \eta\right) d\eta \geq \frac{\pi^2}{64} \,. \tag{29}$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n^2 (t + \eta) \sin^2 \lambda_n (t + \eta) \, d\eta = \| v_2(t) \|_{L_0^2}^2 \tag{30}$$

non converge perciò uniformemente in J *e le funzioni* $v_2(t)$ *e* $x'(t)$ *non hanno quindi le traiettorie* L_0^2*–relativamente compatte.*

Si può infine vedere facilmente che la soluzione $x(t)$ considerata è E–limitata in J. Si ha infatti, per le (2), (5), (8), (17):

$$\begin{aligned} \| x(t) \|_E^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (\psi_n(t) \sin \lambda_n t - \varphi_n(t) \cos \lambda_n t)^2 + \\ + (\varphi_n(t) \sin \lambda_n t + \psi_n(t) \cos \lambda_n t)^2 \} \end{aligned} \tag{31}$$

e quindi, tenendo presenti le (20), (22):

$$\| x(t) \|_E^2 = \begin{cases} \psi_n^2(t) + \varphi_n^2(t) \leq \left(\dfrac{2\pi e^{-\lambda_n}}{\lambda_n}\right)^2 + 4\pi^2 & \text{per } t \in J_n \\ 0 & \text{per } t \notin \bigcup\limits_n J_n \,. \end{cases} \tag{32}$$

Osservazione I: Sia $f(t)$ una funzione continua a valori in uno spazio di Hilbert X e sia $\{y_n\}$ un sistema completo di vettori ortogonali e normati in X; risulta allora:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n f_n(t) \quad , \quad f_n(t) = (f(t), y_n)_X \,. \tag{33}$$

Posto

$$F(t) = \int_0^t f(\eta) \, d\eta \quad , \quad F_n(t) = \int_0^t f_n(\eta) \, d\eta \,, \tag{34}$$

è possibile dimostrare, con un procedimento del tutto analogo a quello seguito sopra, che si può prendere $f(t)$ *indefinitamente derivabile, uniformemente continua ed a traiettoria relativamente compatta insieme a tutte le sue derivate, in modo che* $\mathrm{F}(t)$ *sia* X*–limitata, ma non abbia la traiettoria relativamente compatta nello spazio* $\mathrm{L}_0^2(\mathrm{X})$, *con norma definita dalla relazione*

$$\| x(t) \|_{\mathrm{L}_0^2(\mathrm{X})} = \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \| x(t+\eta) \|_{\mathrm{X}}^2 \, d\eta \right\}^{1/2} . \tag{35}$$

Mantenendo le medesime notazioni introdotte precedentemente e detta $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri reali soddisfacenti alla (7), poniamo:

$$f_n(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_n} \omega\left(\lambda_n\left(t - \dfrac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - t\right)\right) \sin^2 \lambda_n t \\ \qquad\qquad \text{per } \dfrac{k_n - h_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \\ -e^{-\lambda_n} \omega\left(\lambda_n\left(t - \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi\right)\right) \omega\left(\lambda_n\left(\dfrac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi - t\right)\right) \sin^2 \lambda_n t \\ \qquad\qquad \text{per } \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi \leq t \leq \dfrac{k_n + h_n}{\lambda_n} 2\pi \\ 0 \qquad\qquad \text{per } t \notin \mathrm{J}_n . \end{cases} \tag{36}$$

In modo analogo a quanto fatto per la funzione definita mediante la (13), si dimostra che la funzione $f(t)$ data dalle (33), (36) (che è ovviamente indefinitamente derivabile) è uniformemente continua ed ha la traiettoria relativamente compatta, insieme a tutte le sue derivate.

Tenendo presenti le (19), (23) ed osservando che è $\varphi_n(t) = \mathrm{F}_n(t)$, si ha poi, per $n \geq n_2$ e per $t \in \left[\dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi - \dfrac{h_n}{\lambda_n}\pi , \dfrac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \dfrac{h_n}{\lambda_n}\pi\right]$:

$$\mathrm{F}_n(t) \geq \frac{\pi}{4} . \tag{37}$$

Assunto $n \geq n_4 \geq n_2$ tanto grande che risulti $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{h_n}{\lambda_n}\pi$, è allora, per la (37):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{F}_n^2\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \eta\right) d\eta \geq \frac{\pi^2}{16} \tag{38}$$

e, di conseguenza, per $s \geq n_4$:

$$\sum_{n=s}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{F}_n^2\left(\frac{k_s}{\lambda_s} 2\pi + \eta\right) d\eta \geq \frac{\pi^2}{16} . \tag{39}$$

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{F}_n^2(t+\eta) \, d\eta = \| \mathrm{F}(t) \|_{\mathrm{L}_0^2(\mathrm{X})}^2 \tag{40}$$

non converge perciò uniformemente in J ed $F(t)$ non ha quindi la traiettoria $L_0^2(X)$ relativamente compatta.

È infine evidente che $F(t)$ è X–limitata in J, avendosi, per le (22), (34), (36):

$$\| F(t) \|_X = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(\eta)\, d\eta \right)^2 \right\}^{1/2} \leq 2\pi . \tag{41}$$

Osservazione II: Si può facilmente constatare che la soluzione $x(t)$ considerata della (I) non è E–uniformemente continua e non ha la traiettoria E–relativamente compatta.

È infatti anzitutto chiaro che $x(t)$ non può essere E–uniformemente continua. Poiché inoltre, per la (23), per $n \geq n_2$, si ha $\varphi_n\left(\frac{k_n}{\lambda_n} 2\pi + \frac{\pi}{2\lambda_n}\right) \geq$ $\geq \frac{\pi}{4}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) \sin^2 \lambda_n t \tag{42}$$

non converge uniformemente e $x'(t)$ non ha quindi traiettoria L^2–relativamente compatta.

Analogamente, la funzione $F(t)$ data dalla (34) non ha la traiettoria X–relativamente compatta.