Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Geymonat

Sui problemi ai limiti per i sistemi di equazioni lineari ellittici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.1-2, p. 35–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_1-2_35_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Analisi matematica. — *Sui problemi ai limiti per i sistemi di equazioni lineari ellittici* (*). Nota (**) di GIUSEPPE GEYMONAT, presentata dal Corrisp. L. AMERIO.

Negli ultimi anni sono stati ottenuti vari risultati sui problemi ai limiti per sistemi di equazioni lineari ellittici (ved. ad esempio [1], [2], [3], [5], [6], [8], [9], . . .).

In questa breve Nota enuncio alcuni risultati su tali problemi negli spazi di Sobolev del tipo L_p che, tra l'altro, generalizzano teoremi noti nel caso di spazi di Hilbert (ved. ad esempio [2], [7], . . .).

I risultati enunciati verranno dimostrati ed ulteriormente sviluppati in un lavoro in corso di redazione.

1. NOTAZIONI E PRELIMINARI. – Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ di frontiera Γ varietà di classe C^∞ di dimensione $n - 1$, Ω essendo da una sola parte di Γ.

Si consideri la matrice di operatori differenziali a derivate parziali a coefficienti $C^\infty(\overline{\Omega})$ a valori complessi:

$$A = A(x; D) = \| l_{ij}(x; D) \|_{i,j=1,\cdots,m}. \tag{1.1}$$

Supponiamo che la matrice $A(x; D)$ sia *ellittica secondo Douglis–Nirenberg* e cioè:

(I) *Esistono degli* $s_i, t_i \in \mathbf{Z}, i = 1, \cdots, m$ *tali che* $l_{ij}(x; D)$ *sia un operatore a derivate parziali a coefficienti* $C^\infty(\overline{\Omega})$ *a valori complessi di ordine* $\leq s_i + t_j$ *dove se* $s_i + t_j < 0$ *allora* $l_{ij}(x; D) \equiv 0$; *sia* $l^\circ_{ij}(x; D)$ *la parte principale di* $l_{ij}(x; D)$ *e cioè quella di ordine* $s_i + t_j$; *posto*

$$L^\circ(x; \xi) = \det \| l^\circ_{ij}(x; \xi) \|_{i,j=1,\cdots,m} \qquad \xi \in \mathbf{R}^n, x \in \overline{\Omega} \tag{1.2}$$

supponiamo che per ogni $x \in \overline{\Omega}$ *e* $\xi \neq 0$ *sia*

$$L^\circ(x; \xi) \neq 0. \tag{1.3}$$

Si osservi che la condizione (1.3) non cambia se si sostituisce s_i con $s_i - \alpha$ e t_i con $t_i + \alpha$, $i = 1, \cdots, m$, $\alpha \in \mathbf{Z}$ e quindi in particolare si può supporre come noi faremo d'ora in avanti

$$\max_i s_i = 0 \quad \min_i t_i \geq 0. \tag{1.4}$$

(*) Borsista della NATO e del C.N.R. per il 1963–64 a Parigi.
Istituto Matematico dell'Università di Pavia.
(**) Pervenuta all'Accademia il 14 agosto 1964.

Facciamo ora la seguente ulteriore ipotesi che nel caso $m = 1$ coincide con l'ipotesi di ellitticità propria:

(II) *Risulta*

$$\sum_{i=1}^{m} (s_i + t_i) = 2r \qquad r \text{ intero} > 0;$$

inoltre per ogni $x \in \Gamma$ *ed ogni* $\xi \neq 0$ *tangente a* Γ *in* x *ed ogni* $\nu \neq 0$ *normale a* Γ *in* x *il polinomio in* $\tau \in \mathbf{C}$ $L^\circ(\tau) = L^\circ(x\,;\,\xi + \tau\nu)$ *ha esattamente* r *radici* $\tau_k^+(x\,;\,\xi\,,\,\nu)\,,\,k = 1\,,\cdots,r$ *con parte immaginaria positiva.*

Si consideri ora la matrice

$$\mathfrak{A}(x\,;\,\xi) = \| L_{jh}(x\,;\,\xi) \|_{j,h=1,\cdots,m} \qquad \xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}\,,\, x \in \Gamma$$

aggiunta della matrice $A^\circ(x\,;\,\xi) = \| l_{ik}^\circ(x\,;\,\xi) \|_{1,k=,\cdots,m}$; risulta allora, come è noto, $A^\circ(x\,;\,\xi)\,\mathfrak{A}(x\,;\,\xi) = L^\circ(x\,;\,\xi)\,I$ dove I è la matrice $m \times m$ unitaria; è facile verificare che il grado del polinomio, omogeneo in ξ, $L_{jh}(x\,,\,\xi)$ è $2r - s_h - t_j$.

Si consideri ora la matrice di operatori differenziali a derivate parziali a coefficienti $C^\infty(\Gamma)$ a valori complessi

$$B = B(x\,;\,D) = \| B_{qj}(x\,,\,D) \|_{\substack{q=1,\cdots,r \\ j=1,\cdots,m}} \tag{1.5}$$

e si faccia la seguente ipotesi:

(III) *Esistono dei* $\sigma_q \in \mathbf{Z}\,,\, q = 1\,,\cdots,r$ *tali che* $B_{qj}(x\,;\,D)$ *è un operatore a derivate parziali a coefficienti* $C^\infty(\Gamma)$ *a valori complessi di ordine* $\leq \sigma_q + t_j$ *dove se* $\sigma_q + t_j < 0$ *allora* $B_{qj}(x\,;\,D) \equiv 0$; *sia* $B_{qj}^\circ(x\,;\,D)$ *la parte principale di* $B_{qj}(x\,;\,D)$ *e cioè quella di ordine* $\sigma_q + t_j$; *posto poi*

$$C(x\,;\,\xi) = \| C_{qh}(x\,;\,\xi) \|_{\substack{q=1,\cdots,r \\ h=1,\cdots,m}} = \| B_{qj}^\circ(x\,;\,\xi) \|_{\substack{q=1,\cdots,r \\ i=1,\cdots,m}} \mathfrak{A}(x\,;\,\xi)$$

per ogni $x \in \Gamma$, *per ogni* $h = 1,\cdots,m$, *per ogni* $\xi \neq 0$ *tangente a* Γ *in* x *ed ogni* $\nu \neq 0$ *normale a* Γ *in* x *i polinomi in* $\tau \in \mathbf{C}$: $C_{1k}(x\,;\,\xi + \tau\nu)\,,\cdots$ $\cdots, C_{rh}(x\,;\,\xi + \tau\nu)$ *sono linearmente indipendenti modulo* $\prod_{k=1}^{r} (\tau - \tau_k^+(x\,;\xi\,,\nu))$.

A proposito della ipotesi (II) si osservi che ovviamente il grado del polinomio in τ $L^\circ(x\,;\,\xi + \tau\nu)$ è $\sum_{i=1}^{m} (s_i + t_i)$ e quindi se $n \geq 3$ l'ipotesi (II) è una conseguenza dell'ipotesi (I).

Per quanto riguarda l'ipotesi (III) si osservi che nel caso $m = 1$ essa significa che il sistema $\{B_q\}_{q=1}^r$ ricopre l'operatore A.

Si studia il problema ai limiti

$$\left\{ \begin{array}{ll} A\vec{u} = \vec{f} & \text{in } \Omega \\ B\vec{u} = \vec{g} & \text{su } \Gamma \end{array} \right. \tag{1.6}$$

con $\vec{u} = (u_1\,,\cdots,\,u_m)\,,\,\vec{f} = (f_1\,,\cdots,f_m)\,,\,\vec{g} = (g_1\,,\cdots,g_r)$.

Sia $l_1 = \max(0, \sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_r + 1)$; per ogni p reale con $1 < p < +\infty$ e per ogni $k \in \mathbf{N}$ si consideri l'operatore lineare e continuo

$$\vec{u} \longrightarrow \mathrm{T}_{p,k}\,\vec{u} = (\mathrm{A}\vec{u}\,,\,\mathrm{B}\vec{u})$$

di $\prod_{j=1}^{m} \mathrm{W}_p^{l_1+t_j+k}(\Omega)$ in $\prod_{j=1}^{m} \mathrm{W}_p^{l_1-s_j+k}(\Omega) \times \prod_{q=1}^{r} \mathrm{W}_p^{l_1-\sigma_q+k-1/p}(\Gamma)$.

Grazie alle maggiorazioni a priori (vedi ad esempio [1] e la bibliografia ivi citata) si verifica facilmente che risulta

$$\mathrm{K}er\,\mathrm{T}_{p,k} = \{\vec{u} \in [\mathrm{C}^\infty(\overline{\Omega})]^m\,;\,\mathrm{A}\vec{u} = 0\,,\,\mathrm{B}\vec{u} = 0\}$$

e quindi $\mathrm{K}er\,\mathrm{T}_{p,k}$ non dipende né da $p \in]1, +\infty[$ né da $k \in \mathbf{N}$ ed è di dimensione finita, inoltre $\mathrm{I}m\,\mathrm{T}_{p,k}$ è chiusa.

Si pone in maniera naturale il problema di sapere se $\mathrm{T}_{p,k}$ è un operatore ad indice (e cioè se $\chi(\mathrm{T}_{p,k}) = \dim \mathrm{K}er\,\mathrm{T}_{p,k} - \operatorname{codim} \mathrm{I}m\,\mathrm{T}_{p,k} < +\infty$); a tale problema verrà data una risposta affermativa ottenendo così in particolare un teorema dell'alternativa per il problema (1.6); si farà inoltre vedere che $\chi(\mathrm{T}_{p,k})$ non dipende né da $p \in]1, +\infty[$ né da $k \in \mathbf{N}$.

2. ESISTENZA DELL'INDICE ED APPLICAZIONI. – Si dimostra innanzitutto il seguente

TEOREMA 2.1. – *Nelle ipotesi fatte su* Ω *e sotto le ipotesi* (I), (II), (III) *su* A *e* B *per* $1 < p < +\infty$, *per* $k \in \mathbf{N}$ *dato* $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_m) \in \prod_{j=i}^{m} \mathrm{W}_p^{l_1-s_j+k}(\Omega)$ *e* $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_r) \in \prod_{q=1}^{r} \mathrm{W}_p^{l_1-\sigma_q+k-1/p}(\Gamma)$ *esiste* $\vec{\mathfrak{R}}(\vec{f}\,;\vec{\varphi}) \in \prod_{j=1}^{m} \mathrm{W}_p^{l_1+t_j+k}(\Omega)$ *tale che* $(\vec{f}\,;\vec{\varphi}) \longrightarrow \vec{\mathfrak{R}}(\vec{f}\,;\vec{\varphi})$ *sia una applicazione lineare e continua e*

$$\begin{cases} \mathrm{A}\,\vec{\mathfrak{R}}(\vec{f}\,;\vec{\varphi}) = \vec{f} + \vec{\mathcal{T}}(\vec{f}\,;\vec{\varphi}) \\ \mathrm{B}\,\vec{\mathfrak{R}}(\vec{f}\,;\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} + \vec{S}(\vec{f}\,;\vec{\varphi}) \end{cases}$$

con $(\vec{f}, \vec{\varphi}) \longrightarrow (\vec{\mathcal{T}}(\vec{f}\,;\vec{\varphi})\,,\,\vec{S}(\vec{f}\,;\vec{\varphi}))$ *applicazione lineare e continua di*

$$\prod_{j=1}^{m} \mathrm{W}_p^{l_1-s_j+k}(\Omega) \times \prod_{q=1}^{r} \mathrm{W}_p^{l_1-\sigma_q+k-1/p}(\Gamma) \ in \ \prod_{j=1}^{m} \mathrm{W}_p^{l_1-s_j+k+1}(\Omega) \times$$
$$\times \prod_{q=1}^{r} \mathrm{W}_p^{l_1-\sigma_q+k-1/p+1}(\Gamma)\,.$$

Usando poi alcuni risultati di analisi funzionale ed i risultati di [1] si dimostra il seguente teorema che risolve il problema posto alla fine del n. 1.

TEOREMA 2.2. – *Nelle ipotesi fatte su* Ω *le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) *le matrici* A *e* B *verificano le condizioni* (I), (II), (III) *del n. 1;*

(ii) *posto* $l_1 = \max(0, \sigma_1 + 1, \cdots, \sigma_r + 1)$ *per* p *reale,* $p \in]1, +\infty[$, *per* $k \in \mathbf{N}$ *l'operatore* $\vec{u} \longrightarrow T_{p,k}\vec{u} = (A\vec{u}, B\vec{u})$ *è lineare e continuo da* $\prod_{j=1}^{m} W_p^{l_1+t_j+k}(\Omega)$ *in* $\prod_{j=1}^{m} W_p^{l_1-s_j+k}(\Omega) \times \prod_{q=1}^{r} W_p^{l_1-\sigma_q+k-1/p}(\Gamma)$ *ed ammette un indice* $\chi(T_{p,k})$.

È interessante dimostrare che $\chi(T_{p,k})$ non dipende né da $p \in]1, +\infty[$ né da $k \in \mathbf{N}$; e ciò anche in relazione con i recenti risultati annunciati da Atiyah–Singer–Bott (vedi [4], [5]).

Si ha in proposito il seguente

TEOREMA 2.3. – *Nelle ipotesi fatte su* Ω, A *e* B $\chi(T_{p,k})$ *è un numero intero che non dipende né da* $p \in]1, +\infty[$ *né da* $k \in \mathbf{N}$; *tale numero verrà detto indice del problema ai limiti* (1.6) *e verrà indicato con* $\chi(A, B)$.

Per dimostrare tale teorema poiché ovviamente $\mathrm{K}er\, T_{p,k}$ non dipende né da $p \in]1, +\infty[$ né da $k \in \mathbf{N}$ basta dimostrare che codim $\mathrm{I}m\, T_{p,k}$ non dipende né da p né da k. Per tale dimostrazione si usano i teoremi di Sobolev ed il seguente

TEOREMA 2.4 (di Grisvard). – *Siano* E_1, E_0 *due spazi vettoriali topologici localmente convessi e separati. Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:*

(i) E_1 *è denso in* E_0 *e l'iniezione canonica* j *di* E_1 *in* E_0 *è continua*;

(ii) A_i *è un sottospazio chiuso di* E_i, $i = 0, 1$;

(iii) $A_1 = \{x \in E_1 ; j(x) \in A_0\}$;

(iv) A_0 *è di codimensione finita in* E_0.

Allora $\mathrm{codim}_{E_0} A_0 = \mathrm{codim}_{E_1} A_1$.

3. APPLICAZIONI ALLA TEORIA SPETTRALE. – Sia $X_{p,k} = \prod_{j=1}^{m} W_p^{l_1-s_j+k}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, $k \in N$ e sia $A_{p,k}$ l'operatore lineare in $X_{p,k}$ di dominio

$$D(A_{p,k}) = \{\vec{u} \in \prod_{j=1}^{m} W_p^{l_1+t_j+k}(\Omega) ; B\vec{u} = 0\}$$

definito da $A_{p,k}\vec{u} = A\vec{u}$.

È facile vedere che $A_{p,k}$ è un operatore non limitato chiuso e con immagine chiusa in $X_{p,k}$; inoltre $A_{p,k}$ considerato come operatore lineare e continuo da $D(A_{p,k})$, munito della norma del grafico, in $X_{p,k}$ ammette indice $\chi(A_{p,k})$ per ogni $p \in]1, +\infty[$ ed ogni $k \in \mathbf{N}$; tale indice è indipendente da p e da k e si indica con $\chi(A_B)$.

Indicherò con $\rho(A_{p,k})$ l'insieme risolvente di $A_{p,k}$ e con $\sigma(A_{p,k})$ lo spettro di $A_{p,k}$.

Si ha allora la seguente

PROP. 3.1. – (i) $\rho(A_{p,k})$ *non dipende né da* $p \in]1, +\infty[$, *né da* $k \in \mathbf{N}$;

(ii) $\sigma(A_{p,k}) = \mathbf{C}$ *oppure* $\sigma(A_{p,k})$ *è un insieme discreto senza punti di accumulazione al finito;*

(iii) *condizione necessaria perché* $\rho(A_{p,k}) \neq \emptyset$ *è che* $\chi(A_B) = 0$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. AGMON–A. DOUGLIS–L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary* ... (II), « Comm. Pure Appl. Math. », XVII, 35–92 (1964).

[2] M S. AGRANOVICH–A. S. DYNIN, *General boundary problems* ..., « Soviet Math. », *3*, 1323–1327 (1962) trad. inglese di « Doklady Akad Nauk SSSR », *146*, 511–514 (1962).

[3] AGRANOVICH–DYNIN–VOLEVICH, *Solvability of general boundary value* ..., Joint Soviet–American Symposium ..., Novosibirsk 1963.

[4] ATIYAH, Conferenze di Parigi, 1964.

[5] ATIYAH–SINGER, *The index of elliptic operators* ..., « Bull. Amer. Math. Soc. », *69*, 422–432 (1963).

[6] S. M. GELFAND, *On elliptic equations*, « Uspekhi Mat. Nauk », *15*, no. 3, 121–132 (1960).

[7] L. HÖRMANDER, *Linear Partial differential operators*, Springer, Berlin 1963.

[8] SOLONNIKOV, *Estimates for solutions*..., « Soviet Math. », *4*, 1089–1091 (1963) trad. inglese di « Doklady Akad Nauk SSSR », *151*, 783–785 (1963).

[9] L. R. VOLEVICH, *On the theory of boundary value problems*..., « Soviet Math. », *4*, 97–100 (1963) trad. inglese di « Doklady Akad Nauk SSSR », *148*, 97–100 (1963).