Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Andreotti, Edoardo Vesentini

Deformazione di gruppi discontinui

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **37** (1964), n.1-2, p. 25–27.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_37_1-2_25_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Deformazione di gruppi discontinui.* Nota di ALDO ANDREOTTI e EDOARDO VESENTINI, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

Sia D un dominio limitato di $\mathbf{C}^n$, e sia G il gruppo degli automorfismi olomorfi di D. In base ad un classico risultato di H. Cartan, il gruppo G, munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti, è un gruppo di Lie. Un sottogruppo, Γ, di G opera in modo propriamente discontinuo su D se, e soltanto se, Γ è un sottogruppo discreto di G.

Se (i) D è un dominio limitato simmetrico, nessuna componente irriducibile del quale ha dimensione complessa uguale ad uno, e se (ii) lo spazio quoziente D/Γ è compatto, è stato dimostrato in [3] e [4] che le sole famiglie, contenenti Γ, di sottogruppi discreti di G, sono quelle ottenute operando su Γ mediante famiglie di automorfismi interni di G.

È stato congetturato che questo risultato sussiste sotto condizioni più deboli dell'ipotesi (ii). In un lavoro in corso di stampa abbiamo provato fra l'altro che, se D soddisfa la condizione (i) e se il gruppo Γ è a generazione finita e pseudoconcavo (cioè se D/Γ è q-pseudoconcavo con $0 \leq q \leq n-2$ (1)), le sole famiglie, contenenti Γ, di sottogruppi discreti di G le quali lascino fissa la « parte all'infinito » di D/Γ sono quelle ottenute operando su Γ mediante famiglie di automorfismi interni di G.

In questa Nota riassumiamo alcuni dei risultati ottenuti, rinviando al nostro lavoro per maggiori dettagli e per le dimostrazioni.

1. Sia X una varietà complessa connessa, di dimensione complessa n, e sia $\mathcal{O}$ il fascio dei germi di funzioni olomorfe su X. Dato un aperto A di X, diremo che X è un completamento analitico di A se l'applicazione naturale

$$H^0(X, \mathcal{O}) \to H^0(A, \mathcal{O})$$

è un isomorfismo. Sia X un completamento analitico di A, e sia Y una varietà di Stein. Ogni applicazione olomorfa di A in Y si estende, ed in un sol modo, in un'applicazione olomorfa di X in Y. In particolare, se A ammette un completamento analitico olomorficamente completo, ogni completamento ana-

(*) Nella seduta del 9 maggio 1964.

(1) Secondo un risultato inedito di A. Borel, ogni gruppo aritmetico Γ operante su un dominio limitato simmetrico D, verificante l'ipotesi (i), è pseudoconcavo. Ciò era stato provato anteriormente, per domini limitati simmetrici e per gruppi aritmetici di tipo particolare, in [1] e [5]. È noto altresì che i gruppi aritmetici sono a generazione finita.

litico olomorficamente completo di A, è isomorfo a X, l'isomorfismo essendo l'identità su A. In tal caso X dicesi l'inviluppo di olomorfia di A.

Sia $\pi : \tilde{X} \to X$ il rivestimento universale di X.

TEOREMA I. – *Se* X *è fortemente q–pseudoconcava* (2), *con* $0 \leq q \leq n - 2$, *e se il gruppo fondamentale di* X *ammette un numero finito di generatori, esiste un compatto* $K \subset X$ *tale che, se l'aperto connesso* A *di* X *contiene* K, $\tilde{X}$ *è un completamento analitico dell'aperto* $\pi^{-1}(A)$. *In particolare, se* $\tilde{X}$ *è olomorficamente completo,* $\tilde{X}$ *è l'inviluppo di olomorfia di* $\pi^{-1}(A)$.

2. Siano $\mathfrak{V}$ e M due varietà differenziabili di classe C^∞, e sia $\overline{\omega} : \mathfrak{V} \to M$ un'applicazione C^∞ di $\mathfrak{V}$ sopra M, la quale abbia rango massimo in ogni punto di $\mathfrak{V}$. Diremo che la terna $(\mathfrak{V}, \overline{\omega}, M)$ è una famiglia differenziabile di varietà complesse, se $\mathfrak{V}$ ammette un ricoprimento $\{U_i\}$ mediante aperti coordinati tali che per ogni U_i esista un aperto coordinato V_i di M, un aperto S_i di $\mathbf{C}^n$ ed un diffeomorfismo

$$\varphi_i : V_i \times S_i \to U_i$$

tale che

$$\overline{\omega} \circ \varphi_i = pr_{V_i},$$

e che, per ogni scelta degli indici i e j, $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sia un isomorfismo di $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$ su $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$, fasci strutturali essendo i fasci di funzioni C^∞ le cui restrizioni alle fibre di pr_{V_i} e di pr_{V_j} sono olomorfe. Ogni fibra $X_t = \overline{\omega}^{-1}(t)$ $(t \in M)$ ha una struttura di varietà complessa compatibile con la struttura differenziabile indotta in X_t da quella di $\mathfrak{V}$. Assumeremo come fascio di struttura su $\mathfrak{V}$ il fascio dei germi delle funzioni C^∞ le cui restrizioni alle fibre di $\overline{\omega}$ sono olomorfe.

Date due varietà complesse $\mathfrak{V}$ e M ed un'applicazione olomorfa $\overline{\omega}$ di $\mathfrak{V}$ sopra M, che abbia rango massimo in ogni punto di $\mathfrak{V}$, la terna $(\mathfrak{V}, \overline{\omega}, M)$ si dice una famiglia olomorfa di varietà complesse. Fascio di struttura è in questo caso il fascio dei germi di funzioni olomorfe su $\mathfrak{V}$.

Fissata la varietà $X_0 = \overline{\omega}^{-1}(0)$ $(0 \in M)$, diremo che $(\mathfrak{V}, \overline{\omega}, M)$ è una famiglia (differenziabile od olomorfa) di deformazioni di X_0.

Un esempio è offerto dalla terna $(X_0 \times M, pr_M, M)$.

Una famiglia $(\mathfrak{V}, \overline{\omega}, M)$ (differenziabile od olomorfa) di deformazioni della varietà complessa $X_0 = \overline{\omega}^{-1}(0)$ $(0 \in M)$ dicesi *banale* se esiste un isomorfismo ψ di $\mathfrak{V}$ su $X_0 \times M$ tale che $\overline{\omega} = pr_M \circ \psi$ e che $\psi(X_0) = X_0 \times \{0\}$.

La famiglia differenziabile $(\mathfrak{V}, \overline{\omega}, M)$ di deformazioni della varietà complessa $X_0 = \overline{\omega}^{-1}(0)$ $(0 \in M)$ dicesi *rigida all'infinito* se esiste un compatto $K_0 \subset X_0$ ed un isomorfismo

$$g : (X_0 - K_0) \times M \to \mathfrak{V}$$

su un aperto di $\mathfrak{V}$ tale che $\overline{\omega} \circ g = pr_M$, e che $\overline{\omega}_{|\mathfrak{V} - \mathrm{Im}\, g}$ sia una applicazione propria.

(2) Si preferisce ora di chiamare q–pseudoconcavo uno spazio analitico che nella terminologia di [2] si chiamava $(q + 1)$–pseudoconcavo.

3. Sia $\pi : \tilde{\mathcal{V}} \to \mathcal{V}$ il rivestimento universale di V. La terna $(\tilde{\mathcal{V}}, \overline{\omega} \circ \pi, M)$ è una nuova famiglia di varietà complesse sulla varietà M. Diremo che $(\mathcal{V}, \overline{\omega}, M)$ è una famiglia (differenziabile od olomorfa) di varietà complesse uniformizzabili sul dominio limitato D di $\mathbf{C}^n$ se esiste un isomorfismo $\sigma : \tilde{\mathcal{V}} \to D \times M$ il quale rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{V}} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & D \times M \arrow[d, "pr_M"] \\ \mathcal{V} \arrow[r, "\overline{\omega}"] & M \end{tikzcd}$$

TEOREMA 2. – *Sia* $(\mathcal{V}, \overline{\omega}, M)$ *una famiglia differenziabile di deformazioni della varietà complessa* $X_0 = \overline{\omega}^{-1}(0)$ $(0 \in M)$ *sopra il disco unitario* M *di* $\mathbf{R}^m$, *la quale soddisfi alle seguenti ipotesi:*

a) $(\mathcal{V}, \overline{\omega}, M)$ *sia una famiglia di varietà complesse uniformizzabile su un dominio limitato simmetrico* D *di* $\mathbf{C}^n$, *privo di componenti irriducibili di dimensione complessa uno;*

b) *la deformazione sia rigida all'infinito;*

c) X_0 *sia una varietà complessa fortemente q-pseudoconcava, con* $0 \leq q \leq \dim_{\mathbf{C}} X_0 - 2$;

d) *il gruppo fondamentale di* X_0 *ammetta un numero finito di generatori.*

Sotto queste ipotesi, la deformazione $(\mathcal{V}, \overline{\omega}, M)$ *è banale.*

TEOREMA 3. – *Sia* D *un dominio limitato di* $\mathbf{C}^n$. *Ogni famiglia olomorfa* $(\mathcal{V}, \overline{\omega}, M)$ *definita sopra il disco unitario* M *di* $\mathbf{C}^m$, *di deformazioni uniformizzabili su* D, *è banale.*

Si osservi che nel teorema 3 non si fa in particolare nessuna ipotesi sulla dimensione di D. Il teorema vale, per esempio, per una famiglia olomorfa di superficie di Riemann tutte uniformizzabili sopra il disco unitario di **C**.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. ANDREOTTI–H. GRAUERT, *Algebraische Körper von Automorphen Funktionen*, « Nachrichten Akad. der Wissenschaften, Göttingen », 39–48 (1961).

[2] A. ANDREOTTI–H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomomologie des espaces complexes*, « Bull. Soc. Math. France », *90*, 193–259 (1962).

[3] E. CALABI–E. VESENTINI, *On compact, locally symmetric Kähler manifolds*, « Ann. of Math. », *71*, 472–507 (1960).

[4] A. SELBERG, *On discontinuous groups in higher dimensional symmetric spaces*, Contributions to function theory, Bombay 1960, 147–164.

[5] J. SPILKER, *Algebraische Körper von Automorphen Funktionen*, « Math. Annalen », *149*, 341–360 (1963).