
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIOVANNI ASTARITA, GIUSEPPE MARRUCCI

Moto di una bolla di gas in un liquido non-newtoniano a legge di potenza

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.6, p. 836–843.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_6_836_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Chimica (Principi di Ingegneria Chimica). — *Moto di una bolla di gas in un liquido non-newtoniano a legge di potenza*. Nota di GIOVANNI ASTARITA e GIUSEPPE MARRUCCI, presentata (*) dal Corrisp. G. MALQUORI.

INTRODUZIONE.

Il moto di una bolla di gas in un liquido newtoniano è stato oggetto di numerose indagini sia teoriche [1-9] che sperimentali [10-15]. Scopo di questo lavoro è di estendere tale indagine al caso di un liquido non-newtoniano, per il quale si assumerà come equazione reologica di stato quella nota come legge di potenza.

Onde potere impostare una tale trattazione, è opportuno ricapitolare le attuali conoscenze relative al problema nel caso dei fluidi newtoniani, al fine di porre in rilievo quali aspetti della trattazione possano venire estesi direttamente al caso dei liquidi non-newtoniani, e quali invece richiedano una rielaborazione.

Esistono tre regimi di flusso concettualmente possibili nel moto di una bolla di gas in un liquido; tali regimi verranno nel prosieguo identificati come: regime di Stokes, di Levich e di Taylor.

Allorché il numero di Reynolds caratteristico della bolla:

$$(1) \quad \text{Re} = \frac{2RU\rho}{\mu}$$

è molto piccolo ($\text{Re} < 1$), il regime di flusso nel liquido è tale che ovunque sono trascurabili le forze d'inerzia rispetto alle forze viscosse. Le equazioni generali di Navier-Stokes si semplificano notevolmente in tali condizioni, e, per condizioni ai limiti relativamente semplici, possono essere integrate. Sulla superficie della bolla, la cui forma può con ottima approssimazione considerarsi sferica, possono stabilirsi, in linea concettuale, due diverse condizioni. Se l'effetto dei fenomeni interfacciali è tale da rendere stabile l'interfacie, per cui la velocità del liquido, riferita al centro di gravità della bolla, è nulla sulla interfacie, il problema si riduce al classico problema di Stokes [1] del moto di una sfera solida in un fluido viscoso: il fattore d'attrito, definito nel modo usuale, risulta dato da:

$$(2) \quad C_D = 24 \text{Re}^{-1}.$$

Se viceversa i fenomeni interfacciali tendenti a stabilizzare l'interfacie sono di scarsa entità, la componente tangenziale del tensore di sforzi interni nel liquido sulla interfacie è nulla, se la viscosità del gas viene trascurata

(*) Nella seduta del 10 giugno 1964.

rispetto a quella del liquido. Il problema di Stokes, modificato per tenere conto di quest'ultima condizione ai limiti, è stato risolto da Hadamard [2] e da Rybczynsky [3]; il fattore d'attrito risulta dato da:

$$(3) \quad C_D = 16 \operatorname{Re}^{-1}.$$

In pratica, ogni qual volta la bolla di gas è così piccola da rispettare la condizione $\operatorname{Re} < 1$, i fenomeni interfacciali sono di sufficiente entità da realizzare le condizioni previste dalla trattazione di Stokes; può pertanto concludersi che, per numeri di Reynolds sufficientemente piccoli, la bolla di gas si muove in regime di Stokes, ed il fattore d'attrito è dato dalla equazione (2).

Il problema del moto di una bolla di gas in corrispondenza di valori intermedi del numero di Reynolds fu considerato per la prima volta da Levich [5].

Tale autore considerò il caso in cui la bolla, per quanto sferica, è di dimensioni corrispondenti ad un numero di Reynolds sufficientemente elevato, si da far stabilire nel liquido una distribuzione di velocità di ben poco diversa da quella caratteristica del flusso irrotazionale. La distribuzione di velocità del flusso irrotazionale è ricavata ponendo, come condizione alla interfaccie gas-liquido, soltanto la condizione di velocità radiale nulla rispetto al centro di gravità della bolla: è perciò necessario che, nelle immediate adiacenze della bolla, si stabilisca uno strato limite, nel quale il profilo di velocità è distorto in modo tale da realizzare altresì la condizione di componente tangenziale del tensore di sforzi interni nulla alla interfaccie. Levich, intuendo che tale strato limite fosse di entità trascurabile per numeri di Reynolds sufficientemente elevati (di ciò Levich fornì una dimostrazione, basata però su una equazione sbagliata), calcolò la dispersione di energia connessa con la distribuzione di velocità del flusso irrotazionale, giungendo così alla relazione:

$$(4) \quad C_D = 48 \operatorname{Re}^{-1}.$$

Successivamente, Chao [8] pose in rilievo l'errore della trattazione di Levich, e, risolvendo il problema di strato limite, calcolò direttamente la forza agente sulla bolla, giungendo alla equazione:

$$(5) \quad C_D = 32 \operatorname{Re}^{-1}.$$

L'equazione (5) era stata già fornita, con una trattazione basata su una semplice intuizione fisica, da Moore [7]. Sfortunatamente, nella sua trattazione Chao [8] aveva commesso un errore in una delle condizioni ai limiti, che era però compensato da un analogo errore in un passaggio analitico susseguente, come posto in rilievo da Marrucci [16]; inoltre, sia Moore che Chao avevano trascurato l'effetto delle forze di pressione dovute allo strato limite. In un successivo lavoro, Moore [9] pose in rilievo come tali forze erano dello stesso ordine di grandezza delle forze viscosse tenute in conto. Sviluppando la trattazione fino a considerare la scia presente al polo inferiore della bolla,

Moore mostrò come il calcolo del coefficiente d'attrito dovesse essere in effetti basato su considerazioni energetiche, così come intuito da Levich; per cui può oggi affermarsi che, nel regime di moto di Levich, l'equazione (4) correttamente rappresenta il coefficiente d'attrito.

Per bolle molto grandi, le distorsioni di forma divengono così importanti che ogni trattazione basata sulla ipotesi di forma sferica viene a cadere. Taylor [17] ha posto in rilievo come le bolle di gas molto grandi abbiano la forma di un segmento sferico. Per tali bolle la velocità di ascesa è data da:

$$(6) \quad U = \frac{2}{3} (g R')^{1/2}.$$

L'equazione (6) non può essere utilizzata se non è nota la relazione tra il raggio di curvatura R' e il volume della bolla. Tale relazione può essere ricavata se è noto l'angolo di apertura del segmento sferico: il valore teorico di 39 gradi fornito da Moore [7] è in contrasto con le indicazioni sperimentali sia di Taylor [17] che di Astarita e Apuzzo [15], che osservarono angoli di apertura dell'ordine di 50 gradi.

Va a questo punto messo in rilievo che i tre regimi di moto illustrati sono intervallati da campi di transizione, vale a dire da gamme di valori del numero di Reynolds per le quali non è valida nessuna delle schematizzazioni assunte nelle tre trattazioni teoriche. Fra il regime di Stokes e il regime di Levich esiste una zona in cui la distribuzione di velocità nel liquido non può calcolarsi né trascurando le forze d'inerzia, né considerando il flusso irrotazionale; fra il regime di Levich e quello di Taylor esiste una zona in cui la forma della bolla è decisamente non sferica, ma non è ancora quella di un segmento sferico. Inoltre, per qualche liquido il regime di Levich può non esistere affatto, in quanto la forma della bolla può allontanarsi dalla sferica prima che le forze viscosive nel seno del liquido siano diventate trascurabili rispetto alle forze di inerzia.

In linea concettuale, gli stessi tre regimi di moto possono esistere anche in un fluido non-newtoniano. L'analisi teorica degli stessi è possibile solo se viene ipotizzata una equazione reologica di stato per il fluido considerato; in questo lavoro l'analisi verrà ristretta a quei fluidi puramente viscosi la cui reologia è rappresentabile dalla cosiddetta « legge di potenza ».

Per tali fluidi, il problema di Stokes è stato risolto da Wassermann e Slattery [18]. Scopo precipuo di questo lavoro è quello di risolvere il problema del moto di Levich di una bolla di gas in un fluido non-newtoniano a legge di potenza.

TEORIA.

Nello sviluppo delle equazioni teoriche relative al problema considerato, è necessario ricorrere alla notazione tensoriale. Poiché la medesima non è standardizzata, è necessario precisare che verrà qui seguita la notazione diadica di Gibbs, così come illustrata nel testo di Bird, Stewart e Lightfoot [19].

Per le formule di conversione in altre notazioni si rimanda il lettore al testo di Fredrickson [20] o alla monografia di Truesdell [21].

Il fluido a legge di potenza, relativamente al quale la trattazione stessa viene svolta, è identificato dalla equazione reologica di stato:

$$(7) \quad \boldsymbol{\tau} = - \left\{ m \left| \sqrt{\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Delta} : \boldsymbol{\Delta})} \right|^{n-1} \right\} \boldsymbol{\Delta}$$

dove $\boldsymbol{\tau}$ è il tensore di sforzi interni, e $\boldsymbol{\Delta}$ è il tensore simmetrico della velocità di deformazione:

$$(8) \quad \Delta_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}.$$

La distribuzione di velocità nel liquido in regime di Levich, essendo quella del flusso irrotazionale, non dipende dalle caratteristiche reologiche del fluido considerato, se non nello strato limite, la cui entità è trascurabile ai fini della valutazione della dispersione di energia. Pertanto, le velocità: radiale V_r , e tangenziale V_θ , risultano date, in coordinate sferiche, dalla soluzione delle equazioni di Eulero soggetta alle seguenti condizioni:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ovunque,} & V_\theta = 0 \\ r \rightarrow \infty, & V_r = U \cos \theta \\ & V_\theta = U \sin \theta \\ r = R, & V_r = 0 \end{array} \right.$$

da cui si ricava:

$$(10) \quad V_\theta = U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta$$

$$(11) \quad V_r = -U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta$$

Sostituendo le (10) e (11) nelle espressioni per le componenti del tensore $\boldsymbol{\Delta}$ in coordinate sferiche, si ha:

$$(12) \quad \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Delta} : \boldsymbol{\Delta}) = 2 \left[\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{V_\theta}{r} + \frac{V_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] + \\ + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right]^2 = 9 U^2 \frac{R^6}{r^8} [1 + 2 \cos^2 \theta].$$

Sostituendo la (12) nella (7) possono ricavarsi le componenti del tensore di sforzi $\boldsymbol{\tau}$ in coordinate sferiche. La dispersione di energia per unità di volume è quindi ricavabile dalla relazione:

$$(13) \quad - \frac{dE'}{dt} = - \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{V}$$

dove \mathbf{V} è il vettore velocità e $\boldsymbol{\nabla}$ è l'operatore nabla.

Svolgendo le sostituzioni richieste si ha:

$$(14) \quad - \frac{dE'}{dt} = m \left[3 U \frac{R^3}{r^4} \sqrt{1 + 2 \cos^2 \theta} \right]^{n+1}.$$

La dispersione totale di energia risulta perciò:

$$(15) \quad -\frac{dE}{dt} = m [3UR^3]^{n+1} \int_R^\infty dr \int_0^\pi \left[\frac{\sqrt{1+2\cos^2\theta}}{r^4} \right]^{n+1} \cdot 2\pi r \sin\theta d\theta$$

da cui:

$$(16) \quad -\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi m U^{n+1} 3^{n+1}}{4n+1} R^{2-n} I_n$$

dove I_n è l'integrale:

$$(17) \quad I_n = \int_0^\pi (1+2\cos^2\theta)^{\frac{n+1}{2}} \sin\theta d\theta = 2 \int_0^1 (1+x^2)^{\frac{n+1}{2}} dx.$$

TABELLA I.

Valori di I_n e di K_n .

n	I_n	K_n
0	2,55	30,6
0,1	2,62	27,0
0,25	2,73	25,6
1/3	2,80	26,2
0,5	2,94	28,8
2/3	3,08	33,2
0,8	3,20	38,4
1,0	3,33	48,0

La dispersione totale di energia meccanica nel fluido deve in ogni istante eguagliare la perdita di energia potenziale connessa col moto della bolla di gas; pertanto, se F è la forza resistente:

$$(18) \quad -\frac{dE}{dt} = FU$$

da cui può ricavarsi il fattore d'attrito:

$$(19) \quad C_D = \frac{F}{\left(\frac{\rho U^2}{2}\right) \pi R^2}.$$

Sostituendo la (18) e la (16) nella (19) si ha:

$$(20) \quad C_D = K_n Re'^{-1}$$

dove il numero di Reynolds equivalente Re' è definito da:

$$(21) \quad Re' = \frac{(2R)^n U^{2-n} \rho}{m}$$

e la funzione K_n è data da:

$$(22) \quad K_n = \frac{2^{n+2} 3^{n+1}}{1+4n} I_n.$$

Un controllo dell'intera trattazione può aversi valutando il valore di K_1 , il che può farsi in via rigorosa essendo I_1 un integrale analiticamente valutabile.

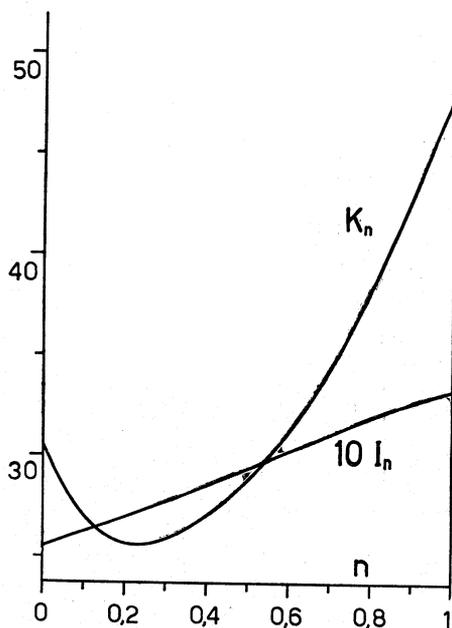


Fig. 1.

Si ottiene:

$$(23) \quad I_1 = 10/3 \quad ; \quad K_1 = 48$$

in pieno accordo con l'equazione (4) di Levich (la equazione reologica di stato (7) degenera in quella costitutiva dei fluidi newtoniani per $n = 1$).

Nella Tabella I e nella fig. 1 sono forniti i valori numerici di K_n e di I_n per fluidi pseudoplastici ($n < 1$).

È interessante rilevare come anche la trattazione di Wassermann e Slattery conduca ad una legge del tipo:

$$(24) \quad C_D = X_n Re'^{-1}$$

dove X_n è una funzione della sola n che, ovviamente, assume il valore 24 per $n = 1$, in accordo con l'equazione (2). È però da osservare che, mentre

la funzione X_n assume, per fluidi pseudoplastici, valori di poco *maggiori* di 24, la funzione K_n assume valori *minori* di 48. Pertanto, mentre per fluidi newtoniani il fattore d'attrito in regime di Stokes differisce per un fattore di 2 da quello che si avrebbe in regime di Levich, tale differenza è molto minore nel caso dei fluidi pseudoplastici.

Va altresì osservato che, come può rilevarsi dalle definizioni di C_D e di Re' , la velocità di una bolla di gas risulta, sia in regime di Stokes che in regime di Levich, proporzionale a $R^{\frac{1+n}{n}}$

$$(25) \quad U \propto R^{\frac{1+n}{n}}.$$

Per fluidi newtoniani, la (25) implica che U è proporzionale alla potenza $2/3$ del volume della bolla; per fluidi pseudoplastici, la velocità U sarà proporzionale ad una potenza più forte del volume della bolla.

NOMENCLATURA

C_D ,	fattore d'attrito, vedi eq. (19).
$-\frac{dE}{dt}$,	dispersione di energia.
$-\frac{dE'}{dt}$,	dispersione di energia per unità di volume.
F ,	forza resistente.
g ,	accelerazione di gravità.
I_n ,	fattore numerico, vedi eq. (17).
K_n ,	fattore numerico, vedi eq. (22).
m ,	consistenza.
n ,	esponente nella legge di potenza.
r ,	distanza dal centro della bolla.
R ,	raggio della bolla sferica.
R' ,	raggio di curvatura della bolla a segmento sferico.
Re ,	numero di Reynolds, vedi eq. (1).
Re' ,	numero di Reynolds generalizzato, vedi eq. (21).
U ,	velocità della bolla.
\mathbf{V} ,	vettore velocità.
x ,	variabile ausiliaria di integrazione.
X_n ,	fattore numerico, vedi eq. (24).
\mathbf{A} ,	tensore di velocità di deformazione.
θ ,	colatitudine.
μ ,	viscosità.
ρ ,	densità.
$\boldsymbol{\tau}$,	tensore di sforzi interni.

Suffissi:

i, j ,	componenti cartesiane
r ,	componente radiale.
θ ,	componente tangenziale.
\emptyset ,	componente azimutale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover Inc., New York 1945, p. 598.
- [2] J. HADAMARD, « *Compt. Rend.* », 152, 1735 (1911).
- [3] W. RYBCZYNSKY, « *Boll. Acc. Sci. (Cracovia)* », A, 40 (1911).
- [4] J. BOUSSINESQ, « *Compt. Rend.* », 157, 313 (1913).
- [5] V. G. LEVICH, « *Giorn. Fis. Teor. Sper. (URSS)* », 19, 18 (1949).
- [6] P. G. SAFFMAN, « *J. Fluid Mech.* », 1, 249 (1956).
- [7] D. W. MOORE, « *J. Fluid Mech.* », 6, 113 (1959).
- [8] B. T. CHAO, « *Phys. Fluids* », 5, 69 (1962).
- [9] D. W. MOORE, « *J. Fluid Mech.* », 16, 161 (1963).
- [10] W. L. HABERMAN, R. K. MORTON, *David Taylor Model Basin*, Rept. no. 802 (1953).
- [11] W. L. HABERMAN, R. K. MORTON, « *Trans. Am. Soc. Civil. Engrs.* », 121, 227 (1956).
- [12] B. ROSENBERG, *David Taylor Model Basin*, Rept. no. 727, (1953).
- [13] F. H. GARNER, D. HAMMERTON, « *Chem. Eng. Sci.* », 3, 1 (1954).
- [14] T. BRYN, *David Taylor Model Basin*, Transl. no. 132 (1949).
- [15] G. ASTARITA, G. APUZZO, « *Chim. Ind. (Milano)* », 45, 1059 (1963).
- [16] G. MARRUCCI, comunicazione personale a B. T. CHAO (1964).
- [17] R. DAVIES, G. I. TAYLOR, « *Proc. Roy. Soc. Londra* », A 200, 375 (1950).
- [18] M. L. WASSERMAN, J. C. SLATTERY, « *A.I.Ch. E. Meeting* », Houston, Texas (1963).
- [19] R. B. BIRD, W. E. STEWART, E. N. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*, J. Wiley, New York 1960, pp. 715-742.
- [20] A. G. FREDRICKSON, *Principles and Applications of Rheology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1964, pp. 256-296.
- [21] C. TRUESDELL, *Kinematics of vorticity*, University of Indiana Press, 1954, capitoli 1-2