Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sulle deformazioni finite di una volta: caratteristiche in 2a approssimazione. Nota III

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.6, p. 825–831.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_6_825_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite di una volta: caratteristiche in 2ª approssimazione.* Nota III di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

È ben nota l'importanza della parte di 2° ordine delle caratteristiche di deformazione nelle questioni di stabilità di un sistema elastico, specie quando la configurazione di riferimento non corrisponda ad uno *stato naturale*. Importanza che assumono già nella teoria linearizzata dell'elasticità, quando si pensa cioè di sviluppare il potenziale elastico specifico, funzione delle caratteristiche di deformazione complete, in termini di componenti di spostamento, arrestando lo sviluppo alla parte di 2° ordine (cfr. [6], cap. V, § 2).

Sono proprio i termini di 2° ordine delle caratteristiche di deformazione che permettono, una volta assegnato lo stress nella configurazione di riferimento, il calcolo del lavoro virtuale corrispondente alla presupposta distribuzione di sforzi; quindi di decidere, mediante l'applicazione dell'usuale algoritmo variazionale e il calcolo dei valori critici (cfr. ad esempio [2], [3], [4], [8]), della stabilità o meno dell'equilibrio forzato in esame.

Scopo di questa Nota è di completare le formule linearizzate della teoria ordinaria delle lastre curve (cfr. [5] cap. XXIV, in particolare p. 524), esplicitando la parte di 2° ordine delle caratteristiche di deformazione nelle componenti di spostamento. Vengono all'uopo utilizzate formule *esatte* stabilite nella Nota II (cfr. [1]). Naturalmente si accetta la teoria del Love, pur rilevando che, risentendo le caratteristiche di deformazione di una certa dissimmetria introdotta già nella definizione, sembra *discutibile una espressione in uso* del potenziale elastico flessionale che di esse si vale.

1. PREMESSE E RICHIAMI. – Siano: Σ la superficie mediana di una lastra curva in una configurazione di riferimento assegnata C; Σ' la superficie deformata in una generica configurazione C′; Q e Q′ la generica coppia di punti corrispondenti delle due superficie nello spostamento $C \rightarrow C'$; l_1 ed l_2 le linee di curvatura di Σ uscenti da Q; l'_1 ed l'_2 le curve trasformate, in generale *non coincidenti con le linee di curvatura della superficie* Σ' uscenti da Q′; $OQ = OQ(\alpha, \beta)$ l'equazione di Σ riferita alle linee di curvatura $\alpha =$ var., $\beta =$ var. (O punto fisso);

$$ds^2 = A^2(\alpha, \beta)\, d\alpha^2 + B^2(\alpha, \beta)\, d\beta^2 \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare di Σ;

$$e_i(\alpha, \beta) = \frac{ds'_i}{ds_i} - 1 \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

(*) Nella seduta del 9 maggio 1964.

i coefficienti di dilatazione lineare in Q nelle direzioni di l_1 ed l_2 rispettivamente, ove $ds_1 = A d\alpha$ e $ds_2 = B d\beta$ sono gli elementi d'arco corrispondenti;

$$\tilde{\omega}(\alpha, \beta) = \cos \chi' \tag{3}$$

(χ' angolo formato da l'_1 e l'_2) lo scorrimento relativo alle due curve l_1 ed l_2;

$$ds'^2 = A^2 (1 + e_1)^2 d\alpha^2 + 2 AB\tilde{\omega} (1 + e_1)(1 + e_2) d\alpha\, d\beta + B^2 (1 + e_2)^2 d\beta^2 \tag{4}$$

il quadrato dell'elemento lineare di Σ'; $T \equiv Q\, \boldsymbol{t}_1\, \boldsymbol{t}_2\, \boldsymbol{t}_3$ la terna, trirettangola e levogira, costituita dai versori delle tangenti alle due linee coordinate l_1 ed l_2 (orientate nel verso secondo cui cresce il corrispondente parametro) e dalla normale a Σ.

Poiché la terna trasformata di T non è generalmente trirettangola ($\chi' \neq \pi/2$), si introduce la terna $T' \equiv Q'\, \boldsymbol{t}'_1\, \boldsymbol{t}'_2\, \boldsymbol{t}'_3$, dello stesso tipo di T, costituita dal versore della tangente alla linea l'_1, dal versore ortogonale e dalla normale alla superficie Σ'. La dissimmetria che ne consegue, in quanto si attribuisce, così facendo, alla famiglia di curve rappresentate dalle equazioni $\alpha =$ var. *un ruolo privilegiato* rispetto all'altra $\beta =$ var. (1), è un punto poco soddisfacente della teoria del Love. Tale dissimmetria rende discutibile, come si è già detto, una espressione del potenziale elastico flessionale di una lastra che, risentendo della scelta fatta, non presenta generalmente *carattere invariantivo* rispetto allo scambio delle due famiglie di curve l_1 ed l_2.

In ogni modo, *accettata la teoria del Love*, introduciamo il rotore $\mathfrak{R}$ che trasforma T in T' ($\boldsymbol{t}'_\alpha = \mathfrak{R}\boldsymbol{t}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$), nonché il suo vettore caratteristico $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}\, tg\, \theta/2$ (cfr. [7], p. 56).

Ho avuto recentemente occasione di accertare (cfr. [1], p. 472) che le caratteristiche sovrabbondanti del Love $p'_i - p_i$, $q'_i - q_i$, $r'_i - r_i$ ($i = 1,2$) (cfr. [5], p. 518), non differiscono dalle componenti $\Omega_{i\alpha}$ ($i = 1, 2$; $\alpha = 1, 2, 3$) secondo T dei vettori

$$\boldsymbol{\Omega}_1 = \frac{2}{1+q^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \alpha} - \boldsymbol{q} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \alpha}\right) \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \frac{2}{1+q^2}\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \beta} - \boldsymbol{q} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \beta}\right), \tag{5}$$

e che in particolare, per le «changes of curvature» (cfr. [5], p. 519), si ha *esattamente*

$$\tau = \frac{1}{A}\Omega_{11} \quad , \quad K_1 = -\frac{1}{A}\Omega_{12} \quad , \quad K_2 = \frac{1}{B}\Omega_{21}. \tag{6}$$

2. ESPRESSIONE DI $\boldsymbol{q}$ MEDIANTE LO SPOSTAMENTO. – Poiché il vettore introdotto, $\boldsymbol{q}$ è univocamente determinato dai versori delle due terne T e T', è chiaro che la (5) ben si presta a calcolare le quantità (6) in funzione delle componenti di spostamento del punto generico di Σ.

Precisamente, decomposto $\boldsymbol{t}'_i$ secondo $\boldsymbol{t}_i$ e la giacitura normale, posto cioè

$$\boldsymbol{t}'_i = \rho_i\, \boldsymbol{t}_i + \boldsymbol{\nu}_i \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\nu}_i \cdot \boldsymbol{t}_i = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{7}$$

(1) È chiaro che in tal modo il ruolo delle due famiglie di curve l'_1, l'_2 viene assunto dalle linee l'_1, e dalle linee della congruenza normale.

si ha, per il vettore $\boldsymbol{q}$, una formula del tipo (cfr. [1] pp. 473-74)

(8) $$2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \varphi \boldsymbol{t}_1$$

con

(9) $$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{1+\rho_1}(\varphi \boldsymbol{\nu}_1 + 2\,\boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{\nu}_1) \quad , \quad \varphi = 2\,\frac{\boldsymbol{t}_3\cdot\boldsymbol{\nu}_2\,(1+\rho_1) - \boldsymbol{t}_3\cdot\boldsymbol{\nu}_1\,\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{\nu}_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2) - \boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{\nu}_2\,\boldsymbol{t}_2\cdot\boldsymbol{\nu}_1}\,.$$

In pari tempo, introdotto lo spostamento

(10) $$\boldsymbol{s} \equiv QQ' = u\boldsymbol{t}_1 + v\boldsymbol{t}_2 + w\boldsymbol{t}_3\,,$$

per i versori della terna T′ si ha (cfr. [1], p. 468)

(11) $$\boldsymbol{t}_1 + \partial_1 \boldsymbol{s} = (1+e_1)\,\boldsymbol{t}'_1 \quad , \quad \boldsymbol{t}_2 + \partial_2 \boldsymbol{s} = (1+e_2)\,(\tilde{\omega}\boldsymbol{t}'_1 + \sqrt{1-\tilde{\omega}^2}\,\boldsymbol{t}'_2)$$

e inversamente

(11′) $$\boldsymbol{t}'_1 = \frac{\boldsymbol{t}_1 + \partial_1 \boldsymbol{s}}{1+e_1} \quad , \quad \boldsymbol{t}'_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}}\left(\frac{\boldsymbol{t}_2 + \partial_2 \boldsymbol{s}}{1+e_2} - \tilde{\omega}\,\frac{\boldsymbol{t}_1 + \partial_1 \boldsymbol{s}}{1+e_1}\right),$$

ove si è indicato con

(12) $$\partial_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha} \quad , \quad \partial_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$$

le *derivate direzionali* secondo l_1 ed l_2 rispettivamente.

Posto allora

(13) $$\partial_i \boldsymbol{s} = u_i\,\boldsymbol{t}_1 + v_i\,\boldsymbol{t}_2 + w_i\,\boldsymbol{t}_3 \qquad (i = 1\,,2)$$

dalla (11′) si trae, avuto riguardo alla (7),

(14) $$\begin{cases} \rho_1 = \dfrac{1+u_1}{1+e_1} \quad , \quad \rho_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}}\left(\dfrac{1+v_2}{1+e_2} - \tilde{\omega}\,\dfrac{v_1}{1+e_1}\right) \\[2ex] \boldsymbol{\nu}_1 = \dfrac{v_1\,\boldsymbol{t}_2 + w_1\,\boldsymbol{t}_3}{1+e_1} \quad , \quad \boldsymbol{\nu}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}}\left[\dfrac{u_2\,\boldsymbol{t}_1 + w_2\,\boldsymbol{t}_3}{1+e_2} - \tilde{\omega}\,\dfrac{(1+u_1)\,\boldsymbol{t}_1 + w_1\,\boldsymbol{t}_3}{1+e_1}\right], \end{cases}$$

quindi in definitiva

(15) $$\varphi = 2\,\frac{w_2\,(2+u_1+e_1) - w_1\,[u_2 + \tilde{\omega}\,(1+e_2)]}{(2+u_1+e_1)\,[1+v_2+\sqrt{1-\tilde{\omega}^2}\,(1+e_2)] - v_1\,[u_2+\tilde{\omega}\,(1+e_2)]}\,.$$

A questo punto non rimane che esplicitare la (13), nonché le (2) e (3), in termini di componenti di spostamento.

Con le notazioni adottate, ove si supponga che la *normale* $\boldsymbol{t}_3$ *sia orientata verso la concavità della superficie* Σ, si ha

(16) $$\begin{cases} \partial_1 \boldsymbol{t}_1 = -\dfrac{1}{A}\partial_2 A\,\boldsymbol{t}_2 + \dfrac{1}{R_1}\boldsymbol{t}_3 \quad , \quad \partial_1 \boldsymbol{t}_2 = \dfrac{1}{A}\partial_2 A\,\boldsymbol{t}_1 \quad , \quad \partial_1 \boldsymbol{t}_3 = -\dfrac{1}{R_1}\boldsymbol{t}_1 \\[2ex] \partial_2 \boldsymbol{t}_1 = \dfrac{1}{B}\partial_1 B\,\boldsymbol{t}_2 \quad , \quad \partial_2 \boldsymbol{t}_2 = -\dfrac{1}{B}\partial_1 B\,\boldsymbol{t}_1 + \dfrac{1}{R_2}\boldsymbol{t}_3 \quad , \quad \partial_2 \boldsymbol{t}_3 = -\dfrac{1}{R_2}\boldsymbol{t}_2 \end{cases}$$

essendo qui $R_1 > 0$, $R_2 > 0$ i raggi di curvatura principali della superficie Σ in Q. Nella (13) si deve pertanto intendere

$$(17)\quad \begin{cases} u_1 = \partial_1 u + \dfrac{v}{A}\partial_2 A - \dfrac{w}{R_1} \;, & v_1 = \partial_1 v - \dfrac{u}{A}\partial_2 A \;, \quad w_1 = \partial_1 w + \dfrac{u}{R_1} \\ u_2 = \partial_2 u - \dfrac{v}{B}\partial_1 B \;, & v_2 = \partial_2 v + \dfrac{u}{B}\partial_1 B - \dfrac{w}{R_2} \;, \quad w_2 = \partial_2 w + \dfrac{v}{R_2}\,. \end{cases}$$

D'altra parte dalla (11) seguono le formule

$$(18)\quad \begin{cases} 1 + e_1 = \sqrt{(1+u_1)^2 + v_1^2 + w_1^2} \;, \quad 1 + e_2 = \sqrt{u_2^2 + (1+v_2)^2 + w_2^2} \\ \tilde{\omega} = \dfrac{v_1 + u_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2}{(1+e_1)(1+e_2)} \;; \end{cases}$$

sì che in definitiva si hanno tutti gli elementi per calcolare *esattamente* $\boldsymbol{q}$ e quindi le « changes of curvature » in termini di componenti u, v, w e loro derivate prime e seconde.

3. CARATTERISTICHE DI DEFORMAZIONE IN 2ª APPROSSIMAZIONE. – Posto

$$(19)\qquad e_i = e_i^{(1)} + e_i^{(2)} + \cdots \quad ; \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)} + \cdots \qquad (i = 1, 2)$$

con $e_i^{(1)}$, $\tilde{\omega}^{(1)}$ parti di 1° ordine ed $e_i^{(2)}$, $\tilde{\omega}^{(2)}$ parti di 2° ordine, le (18) danno luogo alle espressioni seguenti [(2)]:

$$(20)\quad \begin{cases} e_1^{(1)} = u_1 \\ e_2^{(1)} = v_2 \\ \tilde{\omega}^{(1)} = u_2 + v_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_1^{(2)} = \dfrac{1}{2}(v_1^2 + w_1^2) \\ e_2^{(2)} = \dfrac{1}{2}(u_2^2 + w_2^2) \\ \tilde{\omega}^{(2)} = w_1 w_2 - u_1 v_1 - u_2 v_2\,. \end{cases}$$

In modo analogo dalla (15) segue, per $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \cdots$,

$$(21)\qquad \varphi^{(1)} = w_2 \quad , \quad \varphi^{(2)} = -\left(w_1 u_2 + w_2 v_2 + \frac{1}{2} w_1 u_1\right)$$

nonché dalla (9), tenuto conto della (14),

$$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{q}_1^{(1)} + \boldsymbol{q}_1^{(2)} + \cdots = \frac{1}{2 + u_1 + e_1}\left[\varphi^{(1)}(v_1 \boldsymbol{t}_2 + w_1 \boldsymbol{t}_3) + 2(v_1 \boldsymbol{t}_3 - w_1 \boldsymbol{t}_2)\right] + \cdots,$$

cioè

$$(22)\qquad \boldsymbol{q}_1^{(1)} = v_1 \boldsymbol{t}_3 - w_1 \boldsymbol{t}_2 \quad , \quad \boldsymbol{q}_1^{(2)} = \frac{1}{2} w_2 (v_1 \boldsymbol{t}_2 + w_1 \boldsymbol{t}_3) - u_1 (v_1 \boldsymbol{t}_3 - w_1 \boldsymbol{t}_2)\,.$$

La (8) porge allora, per $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{(1)} + \boldsymbol{q}^{(2)} + \cdots$,

$$(23)\quad \begin{cases} 2\boldsymbol{q}^{(1)} = w_2 \boldsymbol{t}_1 - w_1 \boldsymbol{t}_2 + v_1 \boldsymbol{t}_3 \\ 2\boldsymbol{q}^{(2)} = -\left(w_1 u_2 + w_2 v_2 + \dfrac{1}{2} w_1 v_1\right)\boldsymbol{t}_1 + \left(w_1 u_1 + \dfrac{1}{2} w_2 v_1\right)\boldsymbol{t}_2 + \\ \qquad + \left(\dfrac{1}{2} w_1 w_2 - u_1 v_1\right)\boldsymbol{t}_3\,. \end{cases}$$

(2) Cfr., avuto riguardo alle notazioni (17), [5] p. 521 per la parte di 1° ordine e [2] per la parte di 2° ordine, limitatamente al caso di una superficie cilindrica.

Seguono di qui, per semplice derivazione, avuto riguardo alla (16), le caratteristiche di deformazione nella approssimazione voluta. Posto che dalla (5) segue, per $\boldsymbol{\Omega}_i = \boldsymbol{\Omega}_i^{(1)} + \boldsymbol{\Omega}_i^{(2)} + \cdots$,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}_1^{(1)} = 2\,\mathrm{A}\,\partial_1 \boldsymbol{q}^{(1)} \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_1^{(2)} = 2\,\mathrm{A}\,(\partial_1 \boldsymbol{q}^{(2)} - \boldsymbol{q}^{(1)} \wedge \partial_1 \boldsymbol{q}^{(1)}) \\ \boldsymbol{\Omega}_2^{(1)} = 2\,\mathrm{B}\,\partial_2 \boldsymbol{q}^{(1)} \quad , \quad \boldsymbol{\Omega}_2^{(2)} = 2\,\mathrm{B}\,(\partial_2 \boldsymbol{q}^{(2)} - \boldsymbol{q}^{(1)} \wedge \partial_2 \boldsymbol{q}^{(1)}), \end{cases}$$

si ha, tenuto conto della (6),

$$(24) \qquad \begin{cases} \tau^{(1)} = \partial_1 w_2 - \dfrac{v_1}{\mathrm{R}_1} - \dfrac{1}{\mathrm{A}} \partial_2 \mathrm{A}\, w_1 \\ \mathrm{K}_1^{(1)} = \partial_1 w_1 + \dfrac{1}{\mathrm{A}} \partial_2 \mathrm{A}\, w_2 \\ \mathrm{K}_2^{(1)} = \partial_2 w_2 + \dfrac{1}{\mathrm{B}} \partial_1 \mathrm{B} w_1 , \end{cases}$$

nonchè

$$(25) \qquad \begin{cases} \tau^{(2)} = -\,\tilde{\omega}^{(1)}\,\partial_1 w_1 - \partial_1 (e_2^{(1)} w_2) + \left(\dfrac{v_1}{\mathrm{R}_1} + \dfrac{1}{\mathrm{A}} \partial_2 \mathrm{A}\; w_1\right) e_1^{(1)} - w_1\,\partial_1 u_2 \\ \mathrm{K}_1^{(2)} = -\partial_1 (e_1^{(1)} w_1) - \dfrac{1}{\mathrm{A}} \partial_2 \mathrm{A}\,(\tilde{\omega}^{(1)} w_1 + e_2^{(1)} w_2) - w_2\,\partial_1 v_1 - \dfrac{1}{2\mathrm{R}_1}(v_1^2 + w_2^2) \\ \mathrm{K}_2^{(2)} = -\partial_2 (e_2^{(1)} w_2) - \tilde{\omega}^{(1)}\,\partial_2 w_1 - \dfrac{1}{\mathrm{B}} \partial_1 \mathrm{B} e_1^{(1)} w_1 - w_1 \partial_2 u_2 - \dfrac{1}{2\mathrm{R}_2}(v_1^2 + w_1^2). \end{cases}$$

Per quanto riguarda le (24) si confronti [5] p. 524, tenendo conto delle posizioni (12) e (17).

Osservazione. – Le formule ora scritte risentono evidentemente della dissimmetria introdotta fin dall'inizio con la scelta della terna T′ la quale attribuisce, come s'è detto, un ruolo privilegiato ad una delle due famiglie di linee di curvatura di Σ. In termini più precisi se, fermo restando il significato di u, v e w, si scambia il ruolo delle due famiglie di curve, cioè si mutano $\mathrm{A}, \partial_1, \partial_2, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, u$ e v rispettivamente in $\mathrm{B}, \partial_2, \partial_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_1$, v e u, si ottengono, come è naturale, per le «changes of curvature», a differenza di quanto accade per gli allungamenti e lo scorrimento, dei gruppi di formule diversi da quelli riportati. Ad esempio, per le parti di 1° ordine si ha lo scambio di K_1 e K_2 in K_2 e K_1 rispettivamente, mentre τ non si muta in sè, come è naturale in base alla $(6)_1$.

Ne consegue che *l'espressione del potenziale elastico flessionale* fornita dal Love (cfr. [5], p. 530) *non ha carattere invariantivo* rispetto allo scambio delle linee di curvatura *neppure considerando le espressioni linearizzate di* K_1, K_2 *e* τ.

4. CASO DI UN CILINDRO CIRCOLARE. – Supponiamo che la superficie Σ si presenti come un cilindro circolare di raggio R e assumiamo come parametri α e β, per il suo punto generico Q, l'ascissa x sulla generatrice che lo contiene, contata a partire da una sezione circolare fissata e l'angolo θ che il semipiano per Q contenente l'asse del cilindro forma con un semipiano fisso. Per quanto riguarda le componenti dello spostamento $\boldsymbol{s} \equiv \mathrm{QQ}'$ siano: u, la componente secondo la generatrice, v secondo la tangente alla direttrice e w secondo la normale *interna* al cilindro.

Ciò posto, riferiamoci dapprima alla *famiglia delle generatrici*, intendiamo cioè nella (12) $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}$, nonché $A = 1$, $B = R$, $1/R_1 = 0$, $R_2 = R$. Le (24) e (25), avuto riguardo alla (17), assumono allora la forma

$$
(26)\quad
\begin{cases}
\tau^{(1)} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right), \\[2mm]
\tau^{(2)} = -\,\tilde{\omega}^{(1)}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[e_2^{(1)}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\right] - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial\theta} \\[2mm]
K_1^{(1)} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad K_1^{(2)} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e_1^{(1)}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\[2mm]
K_2^{(1)} = \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right), \\[2mm]
K_2^{(2)} = -\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[e_2^{(1)}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\right] - \dfrac{1}{R}\tilde{\omega}^{(1)}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial\theta} - \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \\[2mm]
\qquad\qquad - \dfrac{1}{2R}\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],
\end{cases}
$$

con

$$
(27)\qquad e_1^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad e_2^{(1)} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta} - w\right) \quad , \quad \tilde{\omega}^{(1)} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}.
$$

In particolare nel caso *non estensionale*,

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial\theta} = w \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\theta}
$$

si ha (3)

$$
(28)\quad
\begin{cases}
\tau^{(1)} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{u}{R}\right) \quad , \quad K_1^{(1)} = 0 \quad , \quad K_2^{(1)} = \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + w\right) \\[2mm]
\tau^{(2)} = 0 \quad , \quad K_1^{(2)} = 0 \quad , \quad K_2^{(2)} = -\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \dfrac{1}{2R}\left[\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right].
\end{cases}
$$

Supponiano ora di far riferimento alla *famiglia delle sezioni normali*, con che nelle (24) e (25) si deve intendere $\partial_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x}$, $A = R$, $B = 1$, $R_1 = R$, $1/R_2 = 0$. Scambiando successivamente u e v rispettivamente con v ed u si ottiene, avuto riguardo alla (17), il nuovo gruppo di formule

$$
(26\,a)\quad
\begin{cases}
\bar{\tau}^{(1)} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{u}{R}\right), \\[2mm]
\bar{\tau}^{(2)} = -\dfrac{\tilde{\omega}^{(1)}}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right) - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(e_1^{(1)}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{1}{R^2}e_2^{(1)}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} - \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\theta} \\[2mm]
\bar{K}_1^{(1)} = \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right), \\[2mm]
\bar{K}_1^{(2)} = -\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left[e_2^{(1)}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\right] - \dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \dfrac{1}{2R}\left[\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\[2mm]
\bar{K}_2^{(1)} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\[2mm]
\bar{K}_2^{(2)} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e_1^{(1)}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - \dfrac{\tilde{\omega}^{(1)}}{R}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right) - \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},
\end{cases}
$$

ove sono state conservate le notazioni (27).

(3) Per le parti di 1° ordine si confronti [5] pp. 505–507, nonché [3] p. 1289.

Nel caso *non estensionale* queste danno luogo a

$$(28\,a)\quad \begin{cases} \bar{\tau}^{(1)} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{u}{R}\right) \quad , \quad \bar{K}_1^{(1)} = \dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} + w\right) \quad , \quad \bar{K}_2^{(1)} = 0 \\ \bar{\tau}^{(2)} = -\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial\theta} + v\right)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial\theta} , \\ \bar{K}_1^{(2)} = -\dfrac{1}{R^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \dfrac{1}{2R}\left[\dfrac{1}{R^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \quad , \quad \bar{K}_2^{(2)} = 0 . \end{cases}$$

Si rilevi, dal confronto della (28) con la (28 *a*) che, almeno nel caso non estensionale, sussistono le uguaglianze

$$\bar{\tau}^{(1)} = \tau^{(1)} \quad , \quad \bar{K}_1^{(1)} = K_2^{(1)} \quad , \quad \bar{K}_2^{(1)} = K_1^{(1)}$$

nonché, per le parti di 2° ordine, $\bar{K}_1^{(2)} = K_2^{(2)}$, $\bar{K}_2^{(2)} = K_1^{(2)}$.

Non si ha invece $\bar{\tau}^{(2)} = \tau^{(2)}$; sì che l'espressione del potenziale elastico di flessione di cui in [5], p. 530 è, nel caso di un cilindro, invariante rispetto allo scambio delle linee di curvatura *solo per deformazioni prive di estensione, limitatamente alle espressioni linearizzate di* K_1, K_2 e τ.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] FERRARESE G., *Sulle deformazioni finite di una volta: caso bidimensionale*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 4, vol. XXXVI (1964).

[2] KRALL G., *Stabilità trasversale degli archi da ponte*, « Memorie Fisiche Acc. Lincei », fasc. 13, vol. VI (1962).

[3] KRALL G., *Moltiplicatore critico λ_{cr} di una distribuzione di carico su una volta autoportante*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 12, vol. I (1946).

[4] KRALL G. e CALIGO D., *Moltiplicatore critico λ_{cr} per volte autoportanti*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 2, 3, 4, 5 vol. XXX, fasc. 1–2, vol. XXXI (1961).

[5] LOVE A. E. H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, The University Press, Cambridge (1952).

[6] SIGNORINI A., *Lezioni di fisica matematica* 1952–53, 2ª Ed., Roma, Veschi.

[7] SIGNORINI A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, Memoria I, « Annali Matem. Pura e Appl. », IV, tomo XXII (1943).

[8] TIMOSHENKO S., *Theory of elastic stability*, Mc. Graw-Hill, New York (1961).