Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Claudio Di Comite

Intorno a certi $(q+9)/2$—archi di $S_{2,q}$.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.6, p. 819–824.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_6_819_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Geometrie finite. — *Intorno a certi* $(q+9)/2$*–archi di* $S_{2,q}$ (*).
Nota di CLAUDIO DI COMITE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

Si è ricordato in [2] e [3] come B. Segre (ved. B. Segre [8], [9], [10], [11], [12]) e L. Lombardo Radice (ved. L. Lombardo Radice [4]) abbiano determinato k–archi in uno spazio lineare finito, $S_{2,q}$, servendosi di curve algebriche. In [2] e [3], sotto la guida del prof. B. Segre, si sono costruiti k–archi rispettivamente mediante cubiche cuspidate e mediante cubiche nodate.

In questa Nota, usufruendo di cubiche aventi un punto doppio isolato, si determinano $(q+9)/2$–archi di $S_{2,q}$ ($q \not\equiv 1 \pmod 3$ e $q \not\equiv 1 \pmod 4$), non contenuti in coniche, e, in particolare, 10–archi completi di $S_{2,11}$ (si rammenti che 10–archi completi di $S_{2,11}$ sono stati costruiti da M. Sce con l'aiuto di una calcolatrice elettronica (ved. M. Sce–L. Lunelli [5])).

1. RICHIAMI SULLE C^3 DI $S_{2,q}$ AVENTI UN PUNTO DOPPIO ISOLATO. – Nel piano proiettivo $S_{2,q}$, sopra il campo finito σ di caratteristica $p \neq 2, 3$ (1) ed ordine $q = p^h$, si consideri una cubica K irriducibile avente un punto doppio nodale N (necessariamente in $S_{2,q}$) a tangenti principali coniugate in un'estensione quadratica di σ. Ciascuna delle $q+1$ rette del fascio di $S_{2,q}$ di cento N interseca K, oltre che in N, in uno ed un solo punto, necessariamente su σ; ne segue che:

I) K *contiene* $q+2$ *punti di* $S_{2,q}$.

Poiché l'ordine di K è minore di p ($p \neq 2, 3$), è lecito servirsi nello studio di K delle formule di Plücker, purché si tenga conto anche di elementi (punti e rette) che non sono sul campo base. Si conclude così che:

II) K *è di classe* 4 *e possiede* 3 *flessi*.

Per ogni flesso F di K passa, oltre alla relativa tangente inflessionale, una ad una sola tangente, t. Se F è su σ, anche t è su σ; infatti il punto di contatto di t con K è l'unico punto, distinto da N e da F, in cui la prima polare di F rispetto a K interseca K, ond'esso (e conseguentemente t) è necessariamente su σ se F (e conseguentemente la prima polare di F rispetto a K) è su σ.

Per ogni punto P di $S_{2,q}$ appartenente a K, distinto da N e dagli eventuali flessi su σ, passano, oltre alla tangente in P e K, altre due tangenti distinte, le quali possono essere entrambe su σ oppure coniugate in un'estensione quadratica di σ. Si indichi con u il numero di punti per i quali si verifica la prima eventualità e con v il numero dei punti per cui si verifica la

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1964.

(1) Nel seguito, anche se non detto esplicitamente, si supporrà sempre $p \neq 2, 3$.

seconda; detto i il numero dei flessi di K appartenenti ad $S_{2,q}$, risulta evidentemente

$$u + v + i = q + 1. \tag{1.1}$$

D'altronde, contando (in due modi diversi) il numero delle coppie costituite ciascuna da un punto di $S_{2,q}$ appartenente a K e diverso da N e da una tangente su σ che lo contenga, si ottiene

$$3u + v + 2i = 2(q + 1 - i) + i. \tag{1.2}$$

Dalle (1.1), (1.2) si ricava

$$u = (q + 1)/2 - i$$

$$v = (q + 1)/2.$$

Riepilogando:

III) *Delle tre tangenti passanti per un punto di* $S_{2,q}$ *appartenente a* K *e distinto dal punto doppio e dai flessi, o soltanto la tangente nel punto medesimo è su* σ *oppure tutte e tre sono su* σ; *e l'ulteriore tangente passante per un flesso su* σ *è su* σ. *Detto* i *il numero dei flessi su* σ, *il numero dei punti per cui si presenta la prima eventualità è* $(q + 1)/2$ *e quello dei punti per cui si presenta la seconda è* $(q + 1)/2 - i$.

2. Considerazioni ulteriori sulle C^3 di $S_{2,q}$ con un punto doppio isolato nel caso in cui $q \not\equiv 1 \pmod 3$. – Fissato in $S_{2,q}$, con $q \not\equiv 1 \pmod 3$, un riferimento proiettivo, sia K la C^3 di equazione

$$z(x^2 + xy + y^2) - xy(x + y) = 0. \tag{2.1}$$

Palesemente K è irriducibile ed ha un punto doppio in $O_3(0, 0, 1)$.

Il polinomio $x^2 + xy + y^2$ (che eguagliato a zero rappresenta complessivamente le tangenti principali) è riducibile in σ se e soltanto se -3 è un quadrato in σ; le due tangenti principali sono dunque distinte, essendosi supposto $p \neq 3$.

Si verifica inoltre facilmente che $F_1 = O_1(1, 0, 0)$, $F_2 = O_2(0, 1, 0)$ ed $F_3(1, -1, 0)$ sono punti di flesso. Ricordando (ved. C. Di Comite [3], III prop.) che, se $q \not\equiv 1 \pmod 3$, ogni C^3 nodata di $S_{2,q}$ ha uno ed un solo flesso in $S_{2,q}$, si conclude che le due tangenti principali sono coniugate in un'estensione quadratica di σ e quindi:

IV) *In* $S_{2,q}$, *con* $q \not\equiv 1 \pmod 3$, *esistono cubiche con un punto doppio isolato aventi i tre flessi in* $S_{2,q}$.

Resta anche provato che il polinomio $x^2 + xy + y^2$ è irriducibile in σ e di conseguenza:

V) *In ogni campo finito di ordine* $q = p^h$, *con* $p \neq 2$, $q \not\equiv 1 \pmod 3$, -3 *è un non-quadrato.*

Si osservi che il punto d'intersezione delle tangenti nei flessi $F_1 = O_1$ ed $F_2 = O_2$ è il punto unità del riferimento.

Viceversa, si consideri in $S_{2,q}$ una qualsiasi C^3 avente un punto doppio isolato, N, ed i tre flessi su σ; prendendo $O_3 = N$ ed O_1, O_2 coincidenti con due qualsiansi dei tre flessi (il che si può fare in 6 modi diversi), ed assumendo il punto U unità nel punto d'intersezione delle relative tangenti inflessionali, resta fissato un riferimento in cui la C^3 vien rappresentata dalla (2.1).

3. DETERMINAZIONE DI $(q+9)/2$-ARCHI DI $S_{2,q}$ CON $q \not\equiv 1 \pmod 3$ E $q \not\equiv 1 \pmod 4$. – Detta K una qualsiasi C^3 di $S_{2,q}$ ($q \not\equiv 1 \pmod 3$) avente un punto doppio isolato ed i cui flessi siano tutti e tre su σ, si fissi un riferimento in cui K sia rappresentata dalla (2.1). Com'è subito visto, si può allora dare di K la seguente rappresentazione parametrica:

$$(3.1) \qquad \begin{cases} x = 1 + \lambda + \lambda^2 \\ y = \lambda(1 + \lambda + \lambda^2) \\ z = \lambda(1 + \lambda). \end{cases}$$

Si osservi che: per $\lambda = 0, \infty, -1$ si hanno i tre flessi di K, per $\lambda \in \sigma$ e $\lambda \neq 0, -1$ si ottengono i punti di $S_{2,q}$ appartenenti a K e distinti dal punto doppio N e dai flessi, mentre N si ha per quei valori di λ (appartenenti ad un'estensione quadratica di σ) per cui risulta $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

Si può provare, con ovvii calcoli, che una retta, non passante per N, interseca K nei tre punti di parametro rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ se, e soltanto se, risulta

$$(3.2) \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Dalla (3.2) segue che per un punto di parametro $\lambda \in \sigma$, $\lambda \neq 0, -1$, passa una sola tangente su σ (la tangente nel punto medesimo) se, e soltanto se, l'equazione

$$(3.3) \qquad \mu^2 + 2\mu(\lambda + 1) + \lambda = 0,$$

nella variabile μ, non ha radici in σ; all'uopo occorre e basta che $\lambda^2 + \lambda + 1$ sia un non-quadrato in σ.

Si vuol provare che:

VI) *Se* $q \not\equiv 1 \pmod 3$ e $q \not\equiv 1 \pmod 4$, *l'insieme* H *dei punti di* $S_{2,q}$ *appartenenti a* K *per ciascuno dei quali passa una sola tangente su* σ (*la tangente nel punto considerato*), *è un* $(q+1)/2$-*arco.*

Intanto, per la III, H contiene $(q+1)/2$ punti. Per provare che i punti di H sono a tre a tre non allineati, si consideri l'estensione $\sigma(u)$ di σ definita dall'equazione

$$(3.4) \qquad u^2 + u + 1 = 0.$$

Nel piano S_{2,q^2} sopra $\sigma(u)$ la cubica K, di equazione (2.1), ha in O_3 un nodo. Sia K_0 l'insieme dei $(q^2-1)/2$ punti di S_{2,q^2} appartenenti a K, per ciascuno dei quali passa una sola tangente su $\sigma(u)$, vale a dire la tangente nel punto considerato (ved. C. Di Comite [3], IV prop.), e sia K_1 l'insieme dei tangenziali dei punti di K_0; poiché $q^2 - 1$ è divisibile per 4, K_1 è un $(q^2-1)/4$-arco di S_{2,q^2} (ved. C. Di Comite [3], V prop.). Per provare che H è un $(q+1)/2$-

arco di $S_{2,q}$, basterà quindi provare che H è contenuto in K_1 e, per fare ciò, è sufficiente dimostrare che, per ogni $\lambda \in \sigma$ con $\lambda^2 + \lambda + 1$ non-quadrato in σ, l'equazione (3.3) ammette radici, μ_1 e μ_2, in $\sigma(u)$ e che, per una delle due radici, ad esempio μ_1, risulta $\mu_1^2 + \mu_1 + 1$ non-quadrato in $\sigma(u)$.

Si cominci ad osservare che, se $\lambda^2 + \lambda + 1$ è un non-quadrato in σ, poiché, per la V, -3 è anche un non-quadrato in σ, $(-3)^{-1}(\lambda^2 + \lambda + 1)$ risulta un quadrato in σ, cioè:

$$(3.5) \qquad (-3)^{-1}(\lambda^2 + \lambda + 1) = a^2, \qquad \text{con } a \in \sigma.$$

D'altra parte, essendo $-3 = (2u + 1)^2$ per la (3.4), -3 è un quadrato in $\sigma(u)$ e quindi altrettanto può dirsi di

$$(3.6) \qquad \lambda^2 + \lambda + 1 = (2u + 1)^2 a^2;$$

di conseguenza la (3.3) è risolubile in $\sigma(u)$, le sue due radici μ_i essendo $-(\lambda + 1) \pm (2u + 1)a$. Considerata ad esempio la $\mu_1 = -(\lambda + 1) - (2u + 1)a$, risulta, in virtù delle (3,5), (3.6),

$$(3.7) \qquad \mu_1^2 + \mu_1 + 1 = -6a^2 + a(2\lambda + 1) + 2a(2\lambda + 1)u.$$

Resta da vedere se si può determinare un elemento $c + ud \in \sigma(u)$, tale che sia

$$(3.8) \qquad \mu_1^2 + \mu_1 + 1 = (c + ud)^2.$$

Osservato all'uopo che, per la (3.4), risulta

$$(3.9) \qquad (c + ud)^2 = c^2 - d^2 + d(2c - d)u,$$

dalle (3.7), (3.8), (3.9) segue

$$(3.10) \qquad \begin{cases} -6a^2 + a(2\lambda + 1) = c^2 - d^2, \\ 2a(2\lambda + 1) = d(2c - d). \end{cases}$$

Eliminando la c tra le (3.10), si ottiene

$$(3.11) \qquad 3d^4 - 24a^2d^2 - 4a^2(2\lambda + 1)^2 = 0,$$

e, tenuto conto che per la (3.5) si ha

$$(2\lambda + 1)^2 = -12a^2 - 3,$$

la (3.11) risulta equivalente alla

$$(3.12) \qquad d^4 - 8a^2d^2 + 16a^4 + 4a^2 = 0.$$

Condizione necessaria per la risolubilità in σ di questa equazione, nell'incognita d, è che $-4a^2$ sia un quadrato in σ, cioè che -1 sia un quadrato in σ; ma questa condizione non è verificata, poiché si è supposto $q \not\equiv 1 \pmod 4$, quindi la (3.12) non è risolubile in σ e, di conseguenza, la (3.8), quali che siano $c, d \in \sigma$, non è mai vera, cioè $\mu_1^2 + \mu_1 + 1$ è un non-quadrato in $\sigma(u)$.

Provata così la VI, si dimostrerà ora che:

VII) *Aggregando al* $(q+1)/2$*-arco* H *di* $S_{2,q}$ ($q \not\equiv 1$ (mod. 3) e $q \not\equiv 1$ (mod 4)) *il punto doppio di* K *ed i vertici del trilatero formato dalle tangenti inflessionali, si ottiene un* $(q+9)/2$*-arco.*

Detti U_i ($i=1, 2, 3$) i vertici del trilatero formato dalle tangenti inflessionali, per provare l'asserto basta dimostrare che i quattro punti U_i, N hanno indice zero rispetto ad H e che le sei rette che li congiungono a due a due sono esterne ad H.

È evidente che N ha indice zero rispetto ad H e che le tre tangenti inflessionali sono esterne ad H; rimane quindi soltanto da provare che ciascuno dei punti U_i ha indice zero e che ciascuna delle rette NU_i è esterna.

Si osservi che, per ogni $i = 1, 2, 3$, esistono in $S_{2,q}$ due riferimenti, aventi U_i come punto unità, nei quali K è rappresentata dalle (3.1); fissato ad arbitrio uno dei due riferimenti, se U_i $(1, 1, 1)$ fosse allineato con i punti che si ottengono dalle (3.1) per i valori λ_1 e λ_2 di λ, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma$, sussisterebbe la relazione

$$\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 = 0. \tag{3.13}$$

Ma questa è assurda, poiché l'equazione (3.4) non ammette radici in σ, sicché U_i ha indice zero rispetto ad H.

Infine, la retta NU_i, di equazione $x = y$, incontra K, oltre che in N, nel punto di parametro $\lambda = 1$; questo punto non appartiene ad H, poiché, per $\lambda = 1$, $\lambda^2 + \lambda + 1 = 3$ è un quadrato in σ, essendo il prodotto dei due elementi -1 e -3, non-quadrati in σ, quindi la retta NU_i è esterna ad H.

Riepilogando:

VIII) *Sia* K *una qualsiasi* C^3 *di* $S_{2,q}$ ($q \not\equiv 1$ (mod 3) e $q \not\equiv 1$ (mod 4)) *avente un punto doppio isolato ed i cui flessi siano tutti e tre su* σ. *L'insieme di punti di* $S_{2,q}$ *costituito dai punti di* K *per ciascuno dei quali passa una sola tangente su* σ (*la tangente nel punto considerato*), *dal punto doppio e dai vertici del trilatero formato dalle tre tangenti inflessionali, è un* $(q+9)/2$*-arco.*

Il più piccolo valore di $q = p^h$, tale che sia $p \neq 2, 3$, $q \not\equiv 1$ (mod 3), $q \not\equiv 1$ (mod 4), è $q = p = 11$; il $(q+9)/2$-arco, determinato da una cubica K (irriducibile), ha in ogni caso più di sei punti in comune con K e pertanto:

IX) *Il* $(q+9)/2$*-arco, determinato da una cubica* K, *non è mai contenuto in una conica.*

In particolare:

X) *Per* $q = 11$, *con la suddetta costruzione* (*ved. VIII*) *si ottiene un* 10*-arco completo di* $S_{2,11}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. COSSU, *Su alcune proprietà dei $\{k, n\}$-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito*, « Rend. di Mat. » (3–4), *20*, 263–269 (1961).
[2] C. DI COMITE, *Su k–archi deducibili da cubiche piane*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *33*, 429–435 (1962).
[3] C. DI COMITE, *Su k–archi contenuti in cubiche piane*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *35*, 274–278 (1963).
[4] L. LOMBARDO RADICE, *Sul problema dei k–archi completi in* $S_{2,q}$ ($q = p^t$, *p primo dispari*), « Boll. U.M.I. » (3), II, 178–181 (1956).
[5] M. SCE–L. LUNELLI, *Sulla ricerva dei k–archi completi mediante calcolatrice elettronica*. Convegno reticoli e geometrie proiettive (Palermo 1957). Roma, Cremonese, 81–86 (1958).
[6] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), *17*, 141–142 (1954).
[7] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canad. J. Math », 7, 414–416 (1955).
[8] B. SEGRE, *Curve razionali normali e k–archi negli spazi finiti*, « Ann. Mat. pura appl. » (4), *39*, 357–379 (1955).
[9] B. SEGRE, *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul », ser. A, *21*, 97–123 (1956).
[10] B. SEGRE, *Sui k–archi nei piani finiti di caratteristica 2*, « Revue de Math. Pures et appl. », *2*, 289–300 (1957).
[11] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (4), *48*, 1–97 (1959).
[12] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Ed. Cremonese (1961).