
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CLAUDIO PROCESI

Sugli anelli principali ed un teorema di Goldie

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.6, p. 804–807.
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_6_804_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sugli anelli principali ed un teorema di Goldie.*
Nota di CLAUDIO PROCESI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In un recente articolo [6] ho dato una nuova dimostrazione del primo teorema di Goldie, cioè della parte del teorema riguardante il caso di un anello primo. Successivamente Herstein [4] ha mostrato come si potesse da questa passare al teorema nel caso generale di un anello semiprimo. Il presente articolo nasce quindi come logica conseguenza dei precedenti ed ha lo scopo di mostrare come anche i teoremi di struttura degli anelli principali, dovuti pure al Goldie, si possano impostare con le medesime tecniche sviluppate negli articoli precedentemente menzionati.

In questa Nota utilizzerò le definizioni ed i risultati di [4] e [6].

Un anello R si dice *p r i m o* se $aRb = 0$, $a \in R$, $b \in R$ implica $a = 0$ ovvero $b = 0$. Un anello R si dice *s e m i p r i m o* se non possiede ideali nilpotenti diversi da 0. Un anello noetheriano R si dice *p r i m a r i o* se, detto N il massimo ideale nilpotente di R , R/N è primo.

Se T è un sottoinsieme di un anello R , chiameremo *annullatore sinistro* di T l'insieme degli elementi di R che annullano T a sinistra. Questo insieme è un ideale sinistro e sarà denotato con T_s ; analogamente possiamo definire l'annullatore destro di T che sarà designato con T_d . Usando queste convenzioni, possiamo dimostrare il seguente:

TEOREMA I. — *Se R è un anello primo con ideali sinistri principali, R è isomorfo ad un anello totale di matrici sopra un dominio di Ore.*

Dimostrazione. — R verifica evidentemente le condizioni di Goldie e si possono quindi applicare ad R i risultati di [6]. Sia quindi F_d un annullatore destro minimale, E l'anello delle moltiplicazioni a sinistra di F_d con elementi di F_d . F_d è modulo destro fedele su R e modulo sinistro su E . Dimostreremo precisamente che E possiede un'unità, F_d è un modulo libero su E e R è l'anello degli endomorfismi di ${}_E F_d$, il che concluderà il teorema.

Sia infatti $u_1, \dots, u_n$ una base di $V = K \otimes_E F_d$ (con K corpo dei quozienti a sinistra di E) contenuta in F_d ([6], 3). $T = Ru_1 + Ru_2 + \dots + Ru_n$ è allora un ideale sinistro principale; affermo che T incontra tutti gli ideali. Altrimenti esisterebbe infatti un ideale sinistro $I \neq 0$ con $I \cap T = 0$; perciò, preso $0 \neq u \in I \cap F_d$, u sarebbe linearmente indipendente da $u_1, \dots, u_n$ su E (poiché gli ideali sinistri T e Ru formano somma diretta) e quindi su K , il che è assurdo.

(*) Nella seduta del 10 giugno 1964.

Ora risulta $T = Rc$, con c regolare ([6], 4, lemma), cioè:

$$c = \sum b_i u_i, \quad u_i = x_i c,$$

da cui segue $\sum b_i x_i = 1$, e $x_i \in F_d$. Gli x_i formano evidentemente una base per V ; inoltre, se $u \in F_d$, si ha $u = \sum u b_i x_i$ e $u b_i \in F_d$, cioè $u = \sum \lambda_{u b_i} x_i$. Questo prova che E contiene l'unità di K e che F_d è libero su E . Ogni elemento di R induce un endomorfismo in ${}_E F_d$; resta da dimostrare che, viceversa, ogni endomorfismo di ${}_E F_d$ può essere realizzato in questo modo. Sappiamo intanto ([6], 4) che ogni endomorfismo di ${}_E F_d$ è un elemento $c^{-1} b$ dell'anello Q dei quozienti a sinistra di R . Ma in Q si ha $c^{-1} b = \sum b_i x_i c^{-1} b \in R$, poiché $x_i c^{-1} b \in F_d$ per ipotesi, onde l'asserto.

La seconda meta, che ci proponiamo di raggiungere, è il seguente teorema di struttura per gli anelli principali semiprimi.

TEOREMA 2. — *Un anello R semiprimo con ideali sinistri principali è somma diretta di un numero finito di anelli primi.*

Dimostrazione. — Seguendo il ragionamento di [4] è sufficiente dimostrare che la somma sottomodulo ivi definita, in cui R è rappresentato, è in questo caso diretta. La rappresentazione a cui ci riferiamo è la seguente

$$(1) \quad R \longrightarrow \bigoplus R/M_i,$$

con M_i variabile nella famiglia (finita) degli annullatori massimali di ideali diversi da 0. Per dimostrare che la (1) ci dà una rappresentazione di R in somma diretta, è sufficiente dimostrare, per un noto teorema sulla soluzione delle congruenze, che $M_i + M_j = R$ per ogni coppia di annullatori massimali distinti. Sia $M_i = Ra$, $M_j = Rb$; in ogni caso avremo $Ra + Rb = Rt$, t essendo regolare, poiché Ra è un annullatore massimale e $Rb \notin Ra$. Quindi $xa + yb = t$, $a = ut$, $b = vt$, da cui $xu + yv = 1$. Inoltre, se $IRa = 0$ si ha $IRu = 0$, poiché t è regolare; perciò, dalla massimalità di Ra segue $Ru = Ra$; analogamente $Rv = Rb$, e quindi $Ra + Rb = R$.

A questo punto possiamo intraprendere lo studio degli anelli principali generali. Premettiamo un lemma ben noto sugli anelli noetheriani.

LEMMA 1. — *Sia a un elemento di un anello noetheriano a sinistra; allora esiste un intero k tale che $(a^k)_s \cap Ra^k = 0$.*

Dimostrazione. — Sia k tale che $(a^k)_s = (a^{k+1})_s = \dots$; supposto per assurdo $0 \neq x \in Ra^k \cap (a^k)_s$, si ha $x = sa^k$ e $sa^{2k} = 0$, onde $sa^k = 0$ che è una contraddizione.

Per dimostrare il teorema di Goldie sulla struttura degli anelli principali diamo intanto un risultato preliminare, praticamente dovuto a Johnson [5].

TEOREMA 3. — *Un anello R con ideali sinistri principali è somma diretta di anelli primari.*

Dimostrazione. — Sia N il massimo ideale nilpotente di R , sicché per il teorema 2, sarà $R/N = \bigoplus R_i$, cogli R_i anelli primi; vogliamo mostrare che $R = \bigoplus K_i$, con $\bar{K}_i = R_i$ (useremo il simbolo — per indicare il passaggio al quoziente modulo N). Ragionando per induzione sul numero di componenti

di R/N , è sufficiente provare che, se $R/N = \bar{A} \oplus \bar{B}$ ($\bar{A}, \bar{B}$ non necessariamente primi), esistono due ideali A', B' di R tali che $R = A' \oplus B'$ e $\bar{A}' = \bar{A}, \bar{B}' = \bar{B}$. Ora $\bar{A}_d = \bar{A}_s = \bar{B}, \bar{B}_d = \bar{B}_s = \bar{A}$ poiché R/N è semiprimo; dette A, B le controimmagini di $\bar{A}, \bar{B}$ in R si ha dunque $A = Ra, B = Rb, N \subset Ra$ e $N \subset Rb$. Se $xa \in N, \bar{x}\bar{a} = 0$, segue facilmente $\bar{x} \in \bar{B}$, poiché $\bar{a}$ è regolare in $\bar{R}a$, da cui $x \in B$ e quindi $N = Rba = RbRa$, poiché Rb e Ra sono ideali bilateri; analogamente $N = RaRb$. Si ha $R = A^m + B^m$ per ogni m ; infatti, per induzione, da $R = A^k + B^k$ si deduce $R = (A^k + B^k)(A + B) = A^{k+1} + B^{k+1} + T$ e $T \subset N$, e poiché $T \subset N = NR = NA^k + NB^k \subset A^{k+1} + B^{k+1}$, risulta $R = A^{k+1} + B^{k+1}$.

La dimostrazione sarà completata se proveremo che esiste un m tale che $A^m \cap B^m = 0$. Ora si ha $(AB)^s = 0$, per un s opportuno; ma $AB = BA$, eppertanto $B^s A^s = A^s B^s = 0$, ora il lemma 1 ci dice che esiste un k tale che $(a^k)_s \cap Ra^k = 0$. Avremo quindi $A^m \cap B^m = 0$ almeno per $m \geq \max(s, k)$, come asserito.

Per terminate lo studio degli anelli principali, ci resta solo da esaminare il caso di un anello principale R che sia primario ma non primo. Per ottenere un teorema di struttura in questo caso più generale, sarà opportuno imporre ad R qualche ulteriore restrizione; supporremo in seguito che R sia noetheriano a destra (non mi è noto se questa condizione sia necessaria).

TEOREMA 4. - *Un anello R primario e non primo, con ideali sinistri principali e noetheriano a destra, verifica la condizione minima per gli ideali sinistri e destri.*

Dimostrazione. - Sia $N = Rn$ il massimo ideale nilpotente di R e k il suo indice di nilpotenza; è sufficiente dimostrare che R/N verifica la condizione minima, perché allora i moduli N^t/N^{t+1} verificano per $t = 1, \dots, k-1$ la condizione minima come moduli sinistri (risp. destri) su R/N , e quindi la tesi. Per il primo teorema di Goldie, basta provare che R/N coincide con il suo anello di quozienti. Poiché dobbiamo dimostrare una proprietà di R/N , passando eventualmente all'anello R/N^{k-1} sarà lecito assumere $N^2 = 0$. Premettiamo all'uopo alcuni lemmi.

LEMMA 2. - *Si ha $N_d = N$.*

Dimostrazione. - N_d essendo un ideale di R , $\bar{N}_d$ risulta un ideale di R/N . Se fosse $\bar{N}_d \neq 0$, esisterebbe un $\bar{c}$ regolare in R/N con $\bar{c} \in \bar{N}_d$ ([6], 4, lemma). Ora $Rn + Rc = Rd, c = sd, n = rd, an + bc = d; \bar{d} \in R/N$ è dunque regolare, da cui $r \in N$ e quindi $0 = ran + rbc = rd = n$. Questo assurdo prova l'asserto.

LEMMA 3. - *Se $c \in R$ è tale che $\bar{c}$ è regolare in R/N , si ha $Nc = N$.*

Dimostrazione. - Si ha $N + Rc = Rd$ con $\bar{d}$ regolare, poiché $c = sd$. Da $n = td$ e $d = pn + qc$ segue $t \in N$, poiché $\bar{d}$ è regolare; così $n = t(pn + qc) = tqc$, da cui $Nc \subset N = Rn = Rtqc \subset Nc$ e quindi l'asserto.

LEMMA 4. - *Se $\bar{c}$ è regolare in R/N , c è regolare a sinistra in R .*

Dimostrazione. - Si ha $N = Nc^k$, per ogni k (lemma 3). D'altra parte $(c^l)_s \cap Rc^l = 0$, per un l opportuno; quindi $(c)_s \cap N = 0$ da cui, essendo $(c)_s \subset N$, segue $(c)_s = 0$.

Possiamo infine concludere la dimostrazione del teor. 4. Sia $m \in N$, tale che $Rm = N$ ed mR massimale (si noti che questo è l'unico punto in cui si sfrutta la condizione ascendente sugli ideali destri). Preso $c \in R$ tale che $\bar{c}$ sia regolare in R/N , vogliamo dimostrare che $\bar{c}$ è invertibile. Si ha invero $m = m_1 c$, e quindi $m_1 R \supset mR$; ma $Nc = N = Rm_1 c$ eppertanto $Rm_1 = N$, essendo c regolare a sinistra. Per la massimalità di mR si ha poi $m_1 R = mR$, da cui $m_1 = mx = m_1 cx$ e quindi $m_1 (1 - cx) = 0$; si ha dunque $1 - cx \in N$ (lemma 2), onde $1 = \bar{c}\bar{x}$ in R/N , il che completa la dimostrazione.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. W. GOLDIE, *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, « Proc. London Math. Soc. », vol. 8, pp. 589-608 (1958).
- [2] A. W. GOLDIE, *Semi-prime rings with maximum condition*, « Proc. London Math. Soc. », vol. 10, pp. 201-220 (1960).
- [3] A. W. GOLDIE, *Rings with maximum conditions*, « Arch. Math. », vol. 13, pp. 213-221 (1962).
- [4] I. N. HERSTEIN, *Sul teorema di Goldie*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XXXV, fasc. 1-2, pp. 23-26 (1963).
- [5] R. E. JOHNSON, *Principal right ideal rings*, « Canadian J. of Math. », vol. XV, no. 2, pp. 297-301 (1963).
- [6] C. PROCESI, *Sopra un teorema di Goldie riguardante la struttura degli anelli primi con condizioni di massimo*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XXXIV, fasc. 4, pp. 372-377 (1963).