Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sulla forma intrinseca delle condizioni di congruenza per deformazioni finite

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.5, p. 629–638.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_629_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Meccanica. — *Sulla forma intrinseca delle condizioni di congruenza per deformazioni finite* (*). Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

Ho recentemente stabilito (cfr. [2]) una forma delle condizioni di congruenza per deformazioni finite nella quale intervengono i coefficienti della omografia di deformazione secondo un *qualunque riferimento anolonomo* (1), in luogo dell'abituale riferimento cartesiano. Tali relazioni saranno qui utilizzate (e a tal fine appunto esse vennero stabilite) per mettere in evidenza, con opportuna scelta del riferimento anolonomo, i coefficienti principali e la terna principale di deformazione, così da ottenere una *forma intrinseca* delle condizioni di congruenza. Si tratta di nove equazioni scalari alle derivate parziali del secondo ordine (di cui sei indipendenti) negli elementi intrinseci della deformazione: i tre coefficienti principali e il vettore caratteristico (2) della terna principale.

Viene poi scritto, *in forma intrinseca*, il sistema ai differenziali totali che individua la rotazione locale a partire dalla deformazione.

Le condizioni di congruenza vengono in fine applicate ad un tipo particolare di deformazione nel quale esse valgono ad esprimere l'omografia di deformazione mediante il *solo* coefficiente di dilatazione cubica.

1. RICHIAMI (cfr. [2]). – Siano: $\mathcal{S} \equiv C_* \rightarrow C$ un generico spostamento regolare; $\mathcal{T} \equiv \mathrm{O}\, \boldsymbol{c}_1\, \boldsymbol{c}_2\, \boldsymbol{c}_3$ una terna cartesiana di riferimento prefissata; $P_* \equiv (y^i)$ e $P \equiv (x^i)$ $(i = 1, 2, 3)$ due punti corrispondenti nello spostamento considerato; $\{P_*, \underset{h}{\boldsymbol{\lambda}}(P_*)\}$ $(h = 1, 2, 3)$ una generica terna di vettori linearmente indipendenti associata a P_* (riferimento anolonomo):

$$(1) \qquad \underset{h}{\boldsymbol{\lambda}} = \underset{h}{\lambda^r}\, \boldsymbol{c}_r$$

(somma sottintesa rispetto ad r); $\{P_*, \overset{h}{\boldsymbol{\lambda}}(P_*)\}$ la terna reciproca o duale:

$$(2) \qquad \underset{h}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{k}{\boldsymbol{\lambda}} = \delta_h^k ;$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1964.

(1) Si vuol dire un riferimento costituito da una terna di vettori variabile da punto a punto, generalmente non ortonormale né adattabile ad un sistema di coordinate curvilinee.

(2) Si allude al vettore $\boldsymbol{q}$ che permette di esprimere i versori di una terna cartesiana mediante i versori di una terna prefissata (cfr. [6] p. 56), in luogo degli abituali angoli di Eulero.

∂_h il differenziale secondo λ_h (derivata pfaffiana) esprimibile, nel riferimento cartesiano $\mathcal{C}$, al modo seguente:

$$\partial_h = \lambda^r_h \frac{\partial}{\partial y^r}\,; \tag{3}$$

$\gamma^{i}_{hk,}$ i coefficienti della connessione di C_* (generalmente non simmetrici) nel riferimento anolonomo considerato:

$$\gamma^{i}_{hk,} \equiv \partial_h \lambda_k \cdot \lambda^{i} \quad , \quad \gamma_{hk,i} \equiv \partial_h \lambda_k \cdot \lambda_i\,; \tag{4}$$

∇_h il simbolo di derivazione covariante pfaffiana:

$$\nabla_h T^{lm\cdot\cdot}_{ij\cdot\cdot} \equiv \partial_h T^{lm\cdot\cdot}_{ij\cdot\cdot} - \gamma^{k}_{hi,} T^{lm\cdot\cdot}_{kj\cdot\cdot} - \gamma^{k}_{hj,} T^{lm}_{ik\cdot\cdot} - \cdots + \gamma^{l}_{hk,} T^{km}_{ij\cdot\cdot} + \gamma^{m}_{hk,} T^{lk\cdot\cdot}_{ij\cdot\cdot} + \cdots;$$

ω_{hk} il tensore di anolonomia:

$$\omega_{hk} \equiv \partial_h \lambda_k - \partial_k \lambda_h = \omega^{i}_{hk,} \lambda_i\,. \tag{5}$$

Infine: $\alpha(P_*)$ l'omografia che dà la legge di corrispondenza degli elementi lineari di C_* e C; $\tilde{\omega} = K\alpha\alpha$ l'omografia prodotto di α per la sua coniugata; B_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ i coefficienti di $\tilde{\omega}$ nel riferimento anolonomo considerato:

$$B_{rs} = \tilde{\omega} \lambda_r \cdot \lambda_s\,; \tag{6}$$

B^{rs} i reciproci degli elementi della matrice $\| B_{rs} \|$; ε l'omografia di deformazione, coincidente sostanzialmente con $\tilde{\omega}$:

$$1 + 2\varepsilon = \tilde{\omega} = K\alpha\alpha\,. \tag{7}$$

Conviene anche introdurre il sistema semplice di vettori associati ad $\tilde{\omega}$

$$\mathbf{U}_h = \lambda^{k} \wedge \partial_k \tilde{\omega} \lambda_h \qquad (h = 1, 2, 3), \tag{8}$$

nonché le omografie

$$\varphi_h = \partial_h \tilde{\omega} + \mathbf{U}_h \wedge \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Con tali notazioni i legami tra le omografie α e $\tilde{\omega}$ si scrivono

$$2\,\partial_h \alpha = \alpha \tilde{\omega}^{-1} \varphi_h \quad , \quad 2\,\partial_h K\alpha = K \varphi_h \tilde{\omega}^{-1} K\alpha \tag{10}$$

ove $\tilde{\omega}^{-1} \equiv \alpha^{-1} K\alpha^{-1}$ è l'inversa di $\tilde{\omega}$.

Una forma sintetica delle condizioni di congruenza segue dalle condizioni di integrabilità delle equazioni omografiche (10):

$$\partial_k \mathbf{U}_h - \partial_h \mathbf{U}_k = \mathbf{V}\,[K \varphi_k \tilde{\omega}^{-1} \varphi_h] + \omega^{i}_{kh,} \mathbf{U}_i \qquad (h, k = 1, 2, 3), \tag{11}$$

ove $\mathbf{V}[\;\;]$ è il simbolo di vettore di una omografia.

2. LE CONDIZIONI DI CONGRUENZA PER LE CARATTERISTICHE PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE. – La forma (11) delle condizioni di congruenza è assolutamente generale, completamente arbitrario essendo il riferimento anolonomo $\{P_*, \underset{h}{\lambda}\}$ che vi compare, tanto in forma esplicita quanto in forma implicita attraverso le derivate pfaffiane (3).

Esaminiamo ora il caso, particolarmente interessante per la teoria delle deformazioni finite (4), in cui la terna $T \equiv P_* \underset{1}{\lambda} \underset{2}{\lambda} \underset{3}{\lambda}$ venga scelta, punto per punto di C_*, in modo da coincidere con una (5) terna principale di deformazione, cioè con una terna unita, variabile generalmente con P_*, dell'omografia $\tilde{\omega}$:

$$\tilde{\omega}\underset{h}{\lambda} = \underset{h}{B}\underset{h}{\lambda} \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{12}$$

Nella (11) si dovrà allora intendere le $\underset{hk}{B}$ legate alle *caratteristiche principali* $B_h > 0$ dalla formula

$$\underset{hk}{B} = B_h \delta_{hk} \tag{12'}$$

(senza sommazione). Nelle equazioni che così si ottengono vanno però riguardate come incognite non soltanto le tre caratteristiche B_h, ma la terna T stessa che risulta ora dipendere dalla deformazione.

Fa comodo introdurre il rotore $\mathfrak{R}(P_*)$ che muta la terna fondamentale $\mathcal{T}$ nella terna principale T, nonché il suo vettore caratteristico $\boldsymbol{q}(P_*)$ (cfr. [6] p. 56) ed esprimere, mediante $\boldsymbol{q}$, i versori della terna principale:

$$\underset{k}{\lambda} \equiv \mathfrak{R}\boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{c}_k + \frac{2}{1+q^2}(\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{c}_k - q^2 \boldsymbol{c}_k + \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{c}_k \boldsymbol{q}). \tag{13}$$

Si ha di qui, per semplice derivazione pfaffiana, $\underset{h}{\partial}\underset{k}{\lambda} \equiv \underset{h}{\partial}\mathfrak{R}\boldsymbol{c}_k = \mathfrak{R}\mathfrak{R}^{-1}\underset{h}{\partial}\mathfrak{R}\boldsymbol{c}_k$. Indicato allora con $\underset{h}{\boldsymbol{\omega}}$ il vettore dell'omografia assiale $\mathfrak{R}^{-1}\underset{h}{\partial}\mathfrak{R}$, posto cioè (cfr. [6] p. 83)

$$\underset{h}{\boldsymbol{\omega}} \equiv \mathbf{V}[\mathfrak{R}^{-1}\underset{h}{\partial}\mathfrak{R}] = \frac{2}{1+q^2}(\underset{h}{\partial}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} \wedge \underset{h}{\partial}\boldsymbol{q}), \tag{14}$$

il sistema doppio di vettori $\underset{h}{\partial}\underset{k}{\lambda}$ viene ad esprimersi al modo seguente:

$$\underset{h}{\partial}\underset{k}{\lambda} = \mathfrak{R}(\underset{h}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{c}_k) \tag{15}$$

(3) La derivata pfaffiana di una omografia si esprime con la derivata pfaffiana dei coefficienti, quindi con l'intervento dei coefficienti della connessione (4).

(4) Ove interessi accertare se un certo tipo di stress soddisfacente alle equazioni di Cauchy dia luogo ad una deformazione congruente.

(5) In generale ve ne sarà una sola.

da cui, avuto riguardo alla $(4)_2$,

$$(15') \qquad \underset{hk,i}{\gamma} = \underset{h}{\boldsymbol{\omega}} \wedge \boldsymbol{c}_k \cdot \boldsymbol{c}_i \equiv \underset{h}{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{c}_k \wedge \boldsymbol{c}_i$$

(coefficienti di rotazione di Ricci del riferimento ortonormale $\{P_*, \underset{h}{\boldsymbol{\lambda}}\}$.

Introdotto il tensore dispari di Ricci (cfr. ad esempio [5], p. 85)

$$(16) \qquad \eta_{ski} = \boldsymbol{c}_s \cdot \boldsymbol{c}_k \wedge \boldsymbol{c}_i \equiv \underset{s}{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \underset{k}{\boldsymbol{\lambda}} \wedge \underset{i}{\boldsymbol{\lambda}},$$

nonché le componenti $\underset{h}{\omega^s}$ del vettore $\underset{h}{\boldsymbol{\omega}}$ secondo la terna $\mathcal{C}$, la (15′) assume la forma

$$(15'') \qquad \underset{hk,i}{\gamma} = \underset{h}{\omega^s}\, \eta_{ski}:$$

i coefficienti della connessione $\underset{hk,i}{\gamma}$ *coincidono pertanto, per ogni* h, *con le componenti del tensore aggiunto di* $\underset{h}{\boldsymbol{\omega}}$ (cfr. ad esempio [1] p. 58).

Con le notazioni adottate, la forma scalare delle condizioni di congruenza (11) (cfr. [2], (32′) si scrive

$$(17) \qquad \underset{k}{\nabla}\underset{i}{\nabla}\underset{hj}{B} - \underset{h}{\nabla}\underset{i}{\nabla}\underset{kj}{B} - \underset{k}{\nabla}\underset{j}{\nabla}\underset{hi}{B} + \underset{h}{\nabla}\underset{j}{\nabla}\underset{ki}{B} - \frac{1}{2}\overset{rs}{B}\,(\underset{hi,r}{D}\,\underset{kj,s}{D} - \underset{hj,r}{D}\,\underset{ki,s}{D}) = 0$$

ove

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\underset{i}{\nabla}\underset{hj}{B} \equiv \underset{i}{\partial} B_h\, \delta_{jh} - (B_j - B_h)\, \underset{i}{\omega^s}\, \eta_{shj} \\ &\underset{hi,r}{D} = \underset{h}{\nabla}\underset{ir}{B} + \underset{i}{\nabla}\underset{rh}{B} - \underset{r}{\nabla}\underset{hi}{B}; \end{aligned} \right.$$

così che in definitiva le equazioni (11) vengono espresse nelle caratteristiche principali B_h e nelle componenti cartesiane (secondo $\mathcal{C}$) del vettore $\boldsymbol{q}$. Si noti che quest'ultimo vi compare non solo per il tramite dei vettori $\underset{h}{\boldsymbol{\omega}}$, ma anche implicitamente, attraverso le derivate parziali pfaffiane. Come è naturale, nelle (17), che forniscono soltanto sei equazioni indipendenti, le caratteristiche principali di deformazione B_h non possono essere generalmente separate dal vettore $\boldsymbol{q}$, sì che gli elementi intrinseci della deformazione vi appaiono intimamente collegati.

Osservazione. – I coefficienti della connessione $\overset{i}{\underset{hk,}{\gamma}} \equiv \underset{hk,i}{\gamma}$ (coefficienti di rotazione di Ricci) coincidono in sostanza [cfr. (15′)] con le componenti dei vettori $\underset{h}{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{2}{1+q^2}(\underset{h}{\partial}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q} \wedge \underset{h}{\partial}\boldsymbol{q})$ secondo la terna fissa $\mathcal{C}$. D'altra parte, dalla identità $\underset{h}{\partial}\underset{k}{\boldsymbol{\lambda}} = \underset{h}{\partial}\mathcal{R}\,\mathcal{R}^{-1}\underset{k}{\boldsymbol{\lambda}}$ si ricava, in parallelo alla (15),

$$(19) \qquad \underset{h}{\partial}\underset{k}{\boldsymbol{\lambda}} = \underset{h}{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \underset{k}{\boldsymbol{\lambda}},$$

essendo $\underset{h}{\boldsymbol{\Omega}}$ il vettore della omografia assiale $\underset{h}{\partial}\mathfrak{R}\,\mathfrak{R}^{-1}$, suscettibile della seguente espressione (cfr. [3] p. 170):

$$\underset{h}{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \mathbf{V}\,[\underset{h}{\partial}\mathfrak{R}\,\mathfrak{R}^{-1}] = \frac{2}{1+q^2}(\underset{h}{\partial}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} \wedge \underset{h}{\partial}\boldsymbol{q})\,. \tag{20}$$

I coefficienti della connessione $\overset{i}{\underset{hk}{\gamma}}$, sono pertanto anche le componenti dei vettori (20) secondo la terna T; ciò che permette di attribuire ad essi un notevole significato geometrico (cfr. ad esempio [5] pp. 257–58). Consideriamo infatti, *fissato* l'indice h, una qualunque linea l del campo di vettori $(P_*\,, \underset{h}{\boldsymbol{\lambda}})$ e il moto rigido (rispetto a $\mathcal{T}$) della terna T ottenuto facendo descrivere alla sua origine P_* la linea l con velocità scalare unitaria. Poiché il vettore $\underset{h}{\boldsymbol{\Omega}}$ rappresenta, in base alla (19), la *velocità angolare* istantanea in tale moto rigido, è chiaro che le sue componenti (secondo T) dànno la rapidità con cui cambia l'orientamento della terna T lungo l.

3. DETERMINAZIONE DELL'OMOGRAFIA α. – Supposto che le caratteristiche principali B_h e la terna principale T soddisfino alle condizioni di congruenza (17), rimane il problema di determinare lo spostamento locale, cioè l'omografia α. A questo scopo si possono utilizzare le equazioni omografiche $(10)_1$ o le equivalenti $(10)_2$ che in sostanza corrispondono ad un sistema di nove equazioni scalari ai differenziali totali nei nove coefficienti dell'omografia α. Tali equazioni si semplificano notevolmente se si utilizza la decomposizione di α, sistematica nella teoria delle deformazioni finite, (cfr. [6] pp. 39 e sgg., nonché [7]) nel prodotto di una deformazione pura (6) α_δ $(\alpha_\delta^2 = \tilde{\omega})$ per un rotore α_ϱ (rotazione locale):

$$\alpha = \alpha_\varrho\, \alpha_\delta\,. \tag{21}$$

Per riconoscerlo, partiamo dal legame $2\,\mathbf{V}\,[K\alpha\underset{h}{\partial}\alpha] = \underset{h}{\mathbf{U}}$ tra α e $\tilde{\omega}$, anziché dalla equivalente (10), e osserviamo che, tenendo conto della decomposizione (21), esso si scrive

$$2\,\mathbf{V}\,[\alpha_\delta\, \alpha_\varrho^{-1}\, \underset{h}{\partial}\alpha_\varrho\, \alpha_\delta] = \underset{h}{\mathbf{U}} - 2\,\mathbf{V}\,[\alpha_\delta\, \underset{h}{\partial}\alpha_\delta]\,. \tag{10'}$$

D'altra parte si ha successivamente (7)

$$2\,\mathbf{V}\,[\alpha_\delta\, \alpha_\varrho^{-1}\, \underset{h}{\partial}\alpha_\varrho\, \alpha_\delta] = \overset{k}{\boldsymbol{\lambda}} \wedge \alpha_\delta\, \alpha_\varrho^{-1}\, \underset{h}{\partial}\alpha_\varrho\, \alpha_\delta\, \underset{k}{\boldsymbol{\lambda}} = \alpha_\delta\, \overset{k}{\boldsymbol{\lambda}} \wedge \alpha_\delta\, \alpha_\varrho^{-1}\, \underset{h}{\partial}\alpha_\varrho\, \underset{k}{\boldsymbol{\lambda}} =$$

$$= R\alpha_\delta\, (\overset{k}{\boldsymbol{\lambda}} \wedge \alpha_\varrho^{-1}\, \underset{h}{\partial}\alpha_\varrho\, \underset{k}{\boldsymbol{\lambda}})$$

(6) Si vuol dire una dilatazione, quale $\tilde{\omega} = K\alpha\alpha$, avente i coefficienti principali tutti positivi.

(7) Si tenga conto delle due identità $\mathbf{V}\,[\tau'\,\tau] = K\tau\, \overset{k}{\boldsymbol{\lambda}} \wedge \tau'\, \underset{k}{\boldsymbol{\lambda}}$ e $\tau\boldsymbol{v} \wedge \tau\boldsymbol{w} = R\tau\,(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w})$ (R simbolo di omografia complementare), valida per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ e per due omografie τ e τ'.

nonché, in base alla definizione di omografia inversa,

$$\mathbf{V}[\alpha_\delta\,\alpha_\varrho^{-1}\,\underset{h}{\partial}\,\alpha_\varrho\,\alpha_\delta] = \mathfrak{D}\alpha_\delta^{-1}\,\mathbf{V}[\alpha_\varrho^{-1}\,\underset{h}{\partial}\,\alpha_\varrho],$$

ove $\mathfrak{D}$ è l'invariante terzo di α_δ:

$$\mathfrak{D} = \sqrt{B_1\,B_2\,B_3}\,. \tag{22}$$

La (10′) assume pertanto la forma $\left(\text{cfr., nel caso } \underset{h}{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial y^h}, \text{ [6], p. 81}\right)$

$$\mathbf{V}[\alpha_\varrho^{-1}\,\underset{h}{\partial}\,\alpha_\varrho] = \frac{1}{\mathfrak{D}}\,\alpha_\delta\left(\mathbf{V}[\underset{h}{\partial}\,\alpha_\delta\,\alpha_\delta] + \frac{1}{2}\underset{h}{\mathbf{U}}\right)$$

ovvero, indicato con $\boldsymbol{p}$ il vettore caratteristico del rotore α_ϱ [cfr. (14)]

$$\frac{2}{1+p^2}\,(\underset{h}{\partial}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\wedge\underset{h}{\partial}\boldsymbol{p}) = \underset{h}{\mathbf{D}}, \tag{23}$$

ove si è posto [cfr. (8)]

$$\underset{h}{\mathbf{D}} = \frac{1}{2\mathfrak{D}}\,\alpha_\delta\,[\overset{i}{\boldsymbol{\lambda}}\wedge(\underset{h}{\partial}\,\alpha_\delta\,\alpha_\delta\,\underset{i}{\boldsymbol{\lambda}} + \underset{i}{\partial}\,\tilde{\omega}\,\underset{h}{\boldsymbol{\lambda}})] \qquad (h = 1, 2, 3). \tag{24}$$

Le equazioni ora scritte, univocamente risolubili rispetto alle derivate pfaffiane $\underset{h}{\partial}\boldsymbol{p}$,

$$2\,\underset{h}{\partial}\boldsymbol{p} = \underset{h}{\mathbf{D}} + \boldsymbol{p}\wedge\underset{h}{\mathbf{D}} + \boldsymbol{p}\cdot\underset{h}{\mathbf{D}}\boldsymbol{p}, \tag{23′}$$

traducono in forma intrinseca, anziché cartesiana, il sistema ai differenziali totali illimitatamente integrabile [8] stabilito dal Signorini (cfr. [6] pp. 74 e sgg.) per la deduzione della rotazione locale dalla deformazione. *Nella forma* (23) o (23′) *esso si presta a determinare* $\boldsymbol{p}$ *mediante le caratteristiche principali e il vettore* $\boldsymbol{q}$ *associato alla terna principale di deformazione.*

Naturalmente occorre esplicitare $\underset{h}{\mathbf{D}}$ che, in virtù della $(18)_1$, si scrive [9]

$$\underset{h}{\mathbf{D}} \equiv \frac{1}{2\mathfrak{D}}\,\alpha_\delta\,(\sqrt{B_i}\,\underset{h}{\nabla}\underset{is}{\sqrt{B}} + \underset{i}{\nabla}\underset{hs}{B})\,\overset{i}{\boldsymbol{\lambda}}\wedge\overset{s}{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{2\mathfrak{D}}[\sqrt{B_i}\,(\underset{h}{\partial}\sqrt{B_i}\,\delta_{is} -$$
$$- (\sqrt{B_s} - \sqrt{B_i})\,\underset{h}{\omega^t}\,\eta_{tis}) + \underset{i}{\partial}\,B_h\,\delta_{hs} - (B_s - B_h)\,\underset{i}{\omega^t}\,\eta_{ths}]\,\eta^{ris}\,\alpha_\delta\,\underset{r}{\boldsymbol{\lambda}},$$

ovvero in definitiva

$$\underset{h}{\mathbf{D}} = \frac{1}{2\mathfrak{D}}\{\sqrt{B_h}\,[\underset{h}{\omega^h}(\sqrt{B_{h+1}} - \sqrt{B_{h+2}})^2 + \underset{h+1}{\omega^{h+1}}(B_{h+2} - B_h) + \tag{24′}$$
$$+ \underset{h+2}{\omega^{h+2}}(B_{h+1} - B_h)]\,\underset{h}{\boldsymbol{\lambda}} + \sqrt{B_{h+1}}\,[\underset{h+2}{\partial}\,B_h + 2\sqrt{B_h}\,(\sqrt{B_h} - \sqrt{B_{h+2}})\,\underset{h}{\omega^{h+1}}]\,\underset{h+1}{\boldsymbol{\lambda}} +$$
$$- \sqrt{B_{h+2}}\,[\underset{h+1}{\partial}\,B_h - 2\sqrt{B_h}\,(\sqrt{B_h} - \sqrt{B_{h+1}})\,\underset{h}{\omega^{h+2}}]\,\underset{h+2}{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (h = 1, 2, 3)$$

(senza alcuna sommazione).

(8) Come è noto, assegnata la deformazione, l'omografia α è determinata a meno di un arbitrario spostamento rigido.

(9) L'omografia α_δ ha le stesse direzioni unite di $\tilde{\omega} \equiv \alpha_\delta^2$ e come coefficienti principali le radici quadrate delle B_h.

4. QUALCHE CASO SPECIALE. – Il caso $\underset{h}{\omega} = 0 \; (h = 1\,,2\,,3)$ si esaurisce immediatamente, in quanto richiede l'indipendenza di $\mathfrak{R}$ da P_* e quindi permette l'identificazione di $\mathfrak{T}$ con la terna principale T. In ogni caso è agevole riconoscere che le (17) assumono la forma esplicita:

$$
(25) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\partial_i \left(\frac{\partial_{i+2} B_{i+1}}{\mathfrak{D}} \right) = \frac{1}{2\,\mathfrak{D} B_i} (\partial_i B_{i+1}\, \partial_{i+2} B_i - \partial_i B_i\, \partial_{i+2} B_{i+1}) \\
&\partial_{i+1} \left(\frac{\partial_{i+2} B_i}{\mathfrak{D}} \right) = \frac{1}{2\,\mathfrak{D} B_{i+1}} (\partial_{i+1} B_i\, \partial_{i+2} B_{i+1} - \partial_{i+1} B_{i+1}\, \partial_{i+2} B_i) \\
&\partial_i \left(\frac{\partial_i B_{i+1}}{\mathfrak{D}} \right) + \partial_{i+1} \left(\frac{\partial_{i+1} B_i}{\mathfrak{D}} \right) = - \frac{1}{2\,\mathfrak{D} B_{i+2}} (\partial_i B_{i+1}\, \partial_i B_{i+2} + \\
&\qquad + \partial_{i+1} B_{i+2}\, \partial_{i+1} B_i + \partial_{i+2} B_i\, \partial_{i+2} B_{i+1}) \\
&\qquad \left(\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i}\,,\; i = 1\,,2\,,3 \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Naturalmente delle nove equazioni scritte solo sei sono da ritenersi indipendenti.

A titolo di controllo, per $B_i = B$ (caso di una omotetia), le (25) si scrivono

$$
(26) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\partial_i \left(\frac{\partial_{i+2} B}{B^{3/2}} \right) = 0 \quad , \quad \partial_{i+1} \left(\frac{\partial_{i+2} B}{B^{3/2}} \right) = 0 \\
&\partial_i \left(\frac{\partial_i B}{B^{3/2}} \right) + \partial_{i+1} \left(\frac{\partial_{i+1} B}{B^{3/2}} \right) = - \frac{\operatorname{grad}^2 B}{2\, B^{5/2}}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

dando così luogo alle condizioni

$$
(26') \qquad \frac{\partial_i B}{B^{3/2}} = f_i(y^i) \quad , \quad f_i' + f_{i+1}' = - \frac{\operatorname{grad}^2 B}{2\, B^{5/2}}\,,
$$

ove $f_i(y^i)$ è una funzione arbitraria della *sola* y^i e l'apice indica la derivazione rispetto a questa.

D'altra parte l'uguaglianza $f_1' = f_2' = f_3'$, che segue direttamente dalla $(26')_2$, implica

$$
f_i' = \text{cost.} = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{4}{K}\,; \end{cases}
$$

sì che, prescindendo da una inessenziale traslazione di assi, si ottiene in definitiva

$$
(27) \qquad B^{1/2} = \begin{cases} \text{cost.} \\ \dfrac{K}{\rho^2} \end{cases} \qquad (\rho^2 = {y^1}^2 + {y^2}^2 + {y^3}^2)\,.
$$

Come è naturale, si ritrova che, conformemente ad un celebre teorema di *Liouville*, ogni spostamento conforme equivale o ad una omotetia diretta o ad una antiinversione per raggi vettori reciproci (cfr. [6] n. 15).

Supponiamo ora che, subordinatamente ad una conveniente scelta dell'asse di indice 1 del riferimento $\mathcal{C}$, per l'omografia $\tilde{\omega}$ si abbia:

(28) $$\boldsymbol{q} = q(x)\,\boldsymbol{c}_1 \quad , \quad \mathrm{B}_h = \mathrm{B}_h(x) \qquad (h = 1, 2, 3),$$

quindi, indicando con un apice la derivazione rispetto ad x,

(29) $$\underset{h}{\boldsymbol{\omega}} = \omega\,\delta_{1h}\,\boldsymbol{c}_1 \qquad \left(\omega = \frac{2}{1+q^2}\,q'\right).$$

La $(18)_1$ assume allora la forma

$$\nabla_i \mathrm{B}_{hj} = [\mathrm{B}'_h\,\delta_{jh} - \omega(\mathrm{B}_j - \mathrm{B}_h)\,\eta_{1hj}]\,\delta_{1i}$$

da cui [cfr. $(18)_2$],

$$\mathrm{D}_{hi,r} = [\mathrm{B}'_i\,\delta_{ir} - \omega(\mathrm{B}_r - \mathrm{B}_i)\,\eta_{1ir}]\,\delta_{1h} + [\mathrm{B}'_r\,\delta_{rh} - \omega(\mathrm{B}_h - \mathrm{B}_r)\,\eta_{1rh}]\,\delta_{1i} + \\ - [\mathrm{B}'_h\,\delta_{hi} - \omega(\mathrm{B}_i - \mathrm{B}_h)\,\eta_{1hi}]\,\delta_{1r}.$$

Di qui, esplicitando le (17), si ottengono le seguenti equazioni:

(30) $$\begin{cases} \mathrm{B}'_2\,\mathrm{B}'_3 = \omega^2(\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2)^2 \geq 0 \\ \mathrm{B}''_2 - 2\,\omega^2(\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_3) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{B}'_1\,\mathrm{B}'_2}{\mathrm{B}_1} + \dfrac{\mathrm{B}'^2_2}{\mathrm{B}_2} + \dfrac{\omega^2}{\mathrm{B}_3}(\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2)^2\right] \\ \mathrm{B}''_3 - 2\,\omega^2(\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{B}'_1\,\mathrm{B}'_3}{\mathrm{B}_1} + \dfrac{\omega^2}{\mathrm{B}_2}(\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_3)^2 + \dfrac{\mathrm{B}'^2_3}{\mathrm{B}_3}\right] \\ [\omega(\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_3)]' + \omega(\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_3)' = \dfrac{1}{2}\,\omega(\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2)\left(\dfrac{\mathrm{B}'_1}{\mathrm{B}_1} + \dfrac{\mathrm{B}'_2}{\mathrm{B}_2} + \dfrac{\mathrm{B}'_3}{\mathrm{B}_3}\right). \end{cases}$$

Come è naturale, se $\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_3$ [10], sparisce ogni dipendenza da ω: il sistema (30) equivale in tal caso a $\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_3 = \text{cost.}$, mentre rimane completamente indeterminata la funzione B_1.

Supponiamo invece $\mathrm{B}_2 \neq \mathrm{B}_3$. Se, utilizzando la $(30)_1$, si elimina ω^2 nelle rimanenti tre equazioni, si riconosce a vista che solo due di esse sono indipendenti, in modo che il sistema (30), ferma restando la posizione (22), si riduce a

(30') $$\begin{cases} \mathrm{B}''_2 + 2\,\dfrac{\mathrm{B}'_2\,\mathrm{B}'_3}{\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2} = \dfrac{1}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{D}'\,\mathrm{B}'_2 \\ \mathrm{B}''_3 - 2\,\dfrac{\mathrm{B}'_2\,\mathrm{B}'_3}{\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2} = \dfrac{1}{\mathfrak{D}}\,\mathfrak{D}'\,\mathrm{B}'_3. \end{cases}$$

L'incognita ω è poi subordinata alla ulteriore equazione esplicita

(31) $$\omega^2 = \frac{\mathrm{B}'_2\,\mathrm{B}'_3}{(\mathrm{B}_3 - \mathrm{B}_2)^2}\,.$$

(10) Si può allora supporre $\underset{2}{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{c}_2$, $\underset{3}{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{c}_3$, quindi la terna principale T coincidente con $\mathcal{C}$.

Segue di qui che, *sulla base delle sole condizioni di congruenza, l'omografia di deformazione, cioè le quantità* B_1, B_2, B_3 e ω, *restano* completamente *determinate*, a meno di inevitabili costanti, *in funzione* di $\mathfrak{D}$ o se si vuole *del coefficiente di dilatazione cubica*, $\delta_c = \mathfrak{D} - 1$.

È anzi notevole la circostanza che il sistema (30′) si porta direttamente alle quadrature. Infatti operiamo il cambiamento di variabili dipendenti

$$y = B_2 + B_3 \quad , \quad z = B_2 - B_3 , \tag{32}$$

indi sostituiamo le equazioni (30′) con quelle che si ottengono per somma e differenza rispettivamente. Si ottiene

$$y'' = y' \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{D}} \quad , \quad z'' - \frac{y'^2 - z'^2}{z} = z' \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{D}} ,$$

ovvero

$$\left(\frac{y'}{\mathfrak{D}}\right)' = 0 \quad , \quad \left(\frac{zz'}{\mathfrak{D}}\right)' = \frac{y'^2}{\mathfrak{D}} . \tag{30''}$$

Di qui, posto

$$\delta(x) = \int_0^x \mathfrak{D}(\xi)\, d\xi , \tag{33}$$

segue direttamente

$$y = a + b\,\delta(x), \tag{34}$$

essendo a e b costanti d'integrazione, nonché, supposto $B_2 > B_3$,

$$z = \sqrt{c + d\,\delta(x) + \frac{1}{3} b^2 \delta^3(x)} , \tag{35}$$

con c e d nuove costanti d'integrazione.

Insieme si ha dalla (31)

$$\omega^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{4} \frac{b^2 c - d^2 + b^2 d\,\delta(1 - 2\delta) + \frac{1}{3} b^4 \delta^3 (1 - 3\delta)}{(a + b\delta)\left(c + d\delta + \frac{1}{3} b^2 \delta^3\right)} . \tag{36}$$

Se alle (28) si aggiunge l'ipotesi di incomprimibilità, $\mathfrak{D} = 1$, dalla (33) segue $\delta(x) \equiv x$ e, per determinare la deformazione, basterà assegnare le quattro costanti a, b, c e d, precisando ad esempio i valori di B_2 e B_3 e delle derivate prime per $x = 0$.

Un caso pressoché analogo a quello ora esaminato, riguardante le deformazioni di una piastra, è quello in cui uno degli assi della terna principale sia invariabile e la corrispondente caratteristica principale sia uguale all'unità (cfr. [4]), ma di esso non ci occuperemo in questa sede.

Riferimenti bibliografici.

[1] Cattaneo C., *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione*, Roma, Veschi (1961).

[2] Ferrarese G., *Condizioni di congruenza per deformazioni finite in riferimenti anolonomi*, « Rend. di Matem. » (1–2), *22* (1964).

[3] Ferrarese G., *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite*, « Rend. di Matem. » (1–2), *18* (1959).

[4] Ferrarese G., *Sulle deformazioni delle piastre*, « Rend. di Matem. » (1–2), *19* (1960).

[5] Finzi B. e Pastori M., *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, Zanichelli (1949).

[6] Signorini A., *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Ann. di Matem. Pura e Appl. », ser. IV, tomo XXII (1943).

[7] Signorini A., *Lezioni di fisica matematica* dell'anno 1952–53, 2ª ed., Roma, Veschi.