Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ida Cattaneo-Gasparini

Struttura metrica adattata a una struttura quasi prodotto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **36** (1964), n.5, p. 623–628.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_623_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1964.

Geometria differenziale. — *Struttura metrica adattata a una struttura quasi prodotto* (*). Nota di IDA CATTANEO-GASPARINI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

Nel presente lavoro si continua lo studio delle varietà munite di una struttura quasi prodotto complesso che sono state oggetto di una Memoria precedente [4] e si definisce una metrica adattata a tale struttura. Se H è il tensore caratteristico si impone, come nel caso di varietà quasi complesse, che il prodotto scalare di due vettori arbitrari sia uguale al prodotto scalare dei vettori trasformati mediante H. Le conseguenze di tale legame differiscono però notevolmente da quelle che si presentano nelle varietà quasi complesse che, come è noto, vengono in tali ipotesi ad assumere una struttura di varietà quasi hermitiane. Si dimostra infatti che associata canonicamente alla metrica vi è non già una 2-forma come nel caso di varietà quasi hermitiana, ma un tensore doppio simmetrico che definisce una nuova metrica della varietà legata alla precedente da una semplice relazione di reciprocità rispetto alla struttura quasi prodotto. Viceversa si dimostra che se una varietà differenziabile ammette due tensori metrici complessi legati dalla sovramenzionata relazione di reciprocità, tale varietà ha una struttura di varietà quasi prodotto.

In coriferimenti «adattati», le due metriche si decompongono nella somma e nella differenza delle metriche indotte, sui due sottospazi della decomposizione dello spazio tangente, da g.

Se si impone che il tensore caratteristico della struttura quasi prodotto sia reale, la metrica adattata è allora necessariamente una metrica hermitiana e la struttura non differisce dalla ordinaria struttura quasi hermitiana.

1. RICHIAMO DI NOZIONI SULLE VARIETÀ QUASI HERMITIANE. – Richiamiamo alcune nozioni sulle varietà quasi hermitiane che ci saranno utili per le estensioni che ci proponiamo di fare. Sia V_n, una varietà C^∞ munita di una struttura quasi complessa, T_n^R lo spazio tangente nel generico punto di V_n, T_n^C il suo complessificato $S_{n/2}^C$ e $\tau S_{n/2}^C$ i due spazi supplementari di T_n^C determinati da H, operatore lineare reale di classe C^∞, caratteristico della struttura quasi complessa ($H^2 = -I$ e τ antiinvoluzione su T_n^C) [6]. La trasformazione lineare H determina in T_n^C un isomorfismo tra S_n^C e τS_n^C e, essendo reale, lascia invariato lo spazio reale T_n^R.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematica N. 1 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1964.

Una V_n quasi complessa, dotata di una metrica g di classe C^∞, rango n soddisfacente alla

$$(Hv, Hw)_P = (v, w)_P \qquad \forall P \in V_n \text{ e } \forall v, w \in T_n^C \tag{1}$$

ove (v, w) indica il prodotto scalare rispetto alla metrica g, si dice dotata di una struttura quasi hermitiana.

In particolare se $Hw = v$ si ha

$$(v, Hv) = 0. \tag{2}$$

La (1) esprime che l'isomorfismo tra gli spazi vettoriali $S_{n/2}^C$ e $\tau S_{n/2}^C$ determinato da H deve essere un isomorfismo per la struttura euclidea definita su T_n^C dalla metrica g.

2. Metrica adattata a una struttura quasi prodotto. – Sia ora V_n una varietà differenziabile C^∞ avente una struttura quasi prodotto complesso (cfr. elenco bibliografico, [4]) [1] siano Σ e $\ominus$ due distribuzioni C^∞ di n_1-piani e $(n—n_1)$-piani tali che

$$(T_n^C)_P = \Sigma_P \oplus \ominus_P \qquad \forall P \in V_n, \tag{3}$$

sia H l'operatore lineare complesso di classe C^∞ di rango n, caratteristico della struttura quasi prodotto complesso ($H^2 = I$), e sia g una metrica complessa C^∞ definita su V_n di rango n. Diciamo che tale metrica è adattata alla struttura quasi prodotto se il tensore caratteristico H e il tensore metrico g sono legati dalla (1).

L'interpretazione geometrica della (1) è completamente differente dal caso hermitiano; non si può più parlare ora di isomorfismo tra i due spazi delle due distribuzioni, si può tuttavia dire che: *Condizione necessaria e sufficiente affinché la decomposizione* Σ *e* $\ominus$ *dello spazio tangente* T_n^C *determinata da* H *sia adattata alla struttura riemanniana determinata da* g *è che i due sottospazi* Σ *e* $\ominus$ *siano ortogonali secondo la metrica* g.

Infatti come si è osservato in [4] H determina una simmetria generalizzata rispetto a Σ secondo lo spazio $\ominus$; se questa simmetria è ortogonale l'angolo dei due vettori v e w e la loro lunghezza è uguale all'angolo e alla lunghezza dei vettori trasformati da H e si ha quindi la (1).

Viceversa se il prodotto scalare di due vettori qualunque è uguale al prodotto scalare di due vettori trasformati mediante H, la simmetria individuata da H in T_n^C deve essere una simmetria ortogonale.

Nel caso di una struttura quasi prodotto complesso, la condizione (2) non è soddisfatta in generale; infatti, se Φ e Φ' sono i due proiettori C^∞ di rango rispettivamente n_1 e $n - n_1$ soddisfacenti cioè alle relazioni

$$\Phi^2 = \Phi \qquad \Phi'^2 = \Phi' \qquad \Phi + \Phi' = I \qquad \Phi\Phi' = \Phi'\Phi = 0 \tag{4}$$

(1) Per maggiori ragguagli circa tali strutture si veda il precedente lavoro: *Sulle G-strutture di una* V_n *definite da una* 1*-forma a valori vettoriali* Φ (P).

e legati al tensore caratteristico dalla relazione

$$H = \Phi' - \Phi, \tag{5}$$

si ha

$$(v, Hv) = 0 \Longleftrightarrow \Phi v = \Phi' v. \tag{6}$$

3. METRICHE CANONICHE ASSOCIATE ALL'OPERATORE H. – In un ricoprimento di V_n munito di riferimenti, la (1) si traduce nelle

$$H_T^R H_L^S g_{RS} = g_{TL}. \tag{7}$$

Moltiplicando i due membri per H_H^L e tenendo conto che $H_H^L H_L^S = \delta_H^S$ si ha

$$H_{TR} = H_{RT}. \tag{8}$$

H_{RT} definisce quindi un tensore metrico di rango n.

Dalle (7) si deducono inoltre le

$$H_{TM} H_{LR} g^{MR} = g_{TL}, \tag{9}$$

che esprimono il legame di reciprocità che intercorre tra le due metriche.

Viceversa se su V_n sono definiti due campi di tensori complessi doppi covarianti simmetrici di rango n: H_{RS} e g_{TL}, legati dalla relazione di reciprocità (9), esiste su V_n un campo H di operatori lineari complessi tali che

$$H^2 = I \tag{10}$$

ossia, per quanto si è dimostrato in [4], una struttura quasi prodotto.

Infatti, definito il tensore

$$H_M^R = H_{ML} g^{RL}, \tag{11}$$

si verifica facilmente, tenendo conto delle (9), che esso soddisfa alla (10).

Si ha allora il

TEOREMA: *Su una varietà differenziabile* V_n, *una struttura riemanniana complessa adattata a una struttura quasi prodotto complesso determinata dal tensore caratteristico* H ($H^2 = I$), *determina canonicamente un tensore complesso doppio covariante simmetrico di rango* n: H_{LM}. *I due tensori metrici sono legati dalla relazione di reciprocità* (9). *Viceversa se* V_n *è una varietà differenziabile che ammette due tensori metrici complessi* H_{RS} e g_{RS} *di rango* n, *legati dalle* (9), V_n *è una varietà a struttura quasi prodotto complesso.*

Reciprocità tra le due metriche.

Per mettere in luce la reciprocità che esiste tra le due metriche, preferiamo in questo numero indicare con un simbolo operatoriale, ad esempio un apice, il passaggio da una metrica alla metrica associata.

Le (9) si indicano allora con

$$H_B^D \quad : \quad g_{AD} \longrightarrow g'_{AB} \qquad (\text{ove } g'_{AB} = g'_{BA}).$$

Dato il carattere involutorio dell'operatore H, è

$$(g'_{AB})' = g'_{AB}.$$

Si può quindi affermare che si ha *una reciprocità di due metriche rispetto a una struttura quasi prodotto* (individuata dal tensore caratteristico di struttura H).

Osservazione: Non è sempre indifferente alzare gli indici dei tensori delle due metriche con le g^{AB} o con le g'^{AB} (g'^{AB} essendo i reciproci delle g'_{AB}). Si ha infatti:

1) se si alzano i *due* indici di g_{AB} è *indifferente* alzarli con il tensore g^{AB} o con g'^{AB}. Ossia

$$g'^{AB} g_{BD} = \delta^A_D$$

$$g^{AB} g_{BD} = \delta^A_D.$$

2) se si alza un *solo* indice di g_{SB} con g'_{AS} si ha il tensore caratteristico; infatti

$$g'^{AS} g_{SB} = g^{AP} g^{SQ} g'_{PQ} g_{SB} = g^{AP} g'_{PB} = H^A_B,$$

mentre ovviamente se si alza un indice di g_{AB} con g_{AS} si ha δ^A_B. Analoghe osservazioni valgono naturalmente scambiando g' con g. Queste precisazioni mettono in luce il ruolo perfettamente scambievole delle due metriche g_{AB} e g'_{AB}.

4. METRICA SU Σ E METRICA SU $\ominus$. – Dalla relazione (5) e dalle (7) si ricava abbassando l'indice di Φ (e di Φ') mediante g:

$$\Phi_{TR} = \Phi_{RT} \qquad \Phi'_{TR} = \Phi'_{RT} \tag{12}$$

$$H_{TR} = \Phi'_{TR} - \Phi_{TR} \tag{13}$$

Osservazione: I due tensori simmetrici Φ_{TR} e Φ'_{RT}, rispettivamente di rango n_1 e $n - n_1$ ottenuti dagli operatori di proiezione, rappresentano la metrica su Σ e su $\ominus$. Questa osservazione nel caso di una decomposizione reale con metrica iperbolica normale è stata messa in luce in [1].

Osservazione: Dalla relazione fondamentale tra i proiettori

$$\Phi^R_T + \Phi'^R_T = \delta^R_T \tag{14}$$

si ha in seguito a moltiplicazione per g_{RS}

$$\Phi_{TS} + \Phi'_{TS} = g_{TS}. \tag{15}$$

Da quanto precede si ha il

TEOREMA: *In una V_n quasi prodotto complesso, la somma e la differenza delle metriche su Σ e su $\ominus$ definiscono due metriche g_{RS} e H_{RS} adattate. Combinando linearmente queste due metriche regolari si ottengono tutte le possibili metriche adattate alla varietà quasi prodotto.*

Osservazione: In un riferimento $\{e_R\}$ adattato alla struttura quasi prodotto $(e_\alpha \in \Sigma, e_r \in \ominus)$ (2), le componenti di H sono

$$H^\alpha_\mu = \delta^\alpha_\mu \quad , \quad H^r_s = -\delta^r_s \quad , \quad H^r_\alpha = H^\alpha_r = 0 . \tag{16}$$

Tenendo conto di questi valori si vede immediatamente che il sistema di equazioni (7) non impone alcuna limitazione alle $g_{\alpha\beta}$ e alle g_{rs}, mentre implica che sia

$$g_{r\alpha} = g_{\alpha r} = 0. \tag{17}$$

In un coriferimento ϑ^R adattato, $\vartheta^R(e_S) = \delta^R_S$, dalle (13) e (16), poiché

$$\Phi_{rs} = \Phi_{r\alpha} = \Phi_{\alpha r} = 0$$

$$\Phi'_{\alpha\beta} = \Phi'_{r\alpha} = \Phi'_{\alpha r} = 0$$

è

$$g_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta} \tag{18}$$

$$g_{rs} = \Phi'_{rs} \tag{19}$$

e le due forme quadratiche fondamentali assumono la seguente decomposizione

$$ds^2 = \Phi_{\alpha\beta}\, \vartheta^\alpha \vartheta^\beta + \Phi_{rs}\, \vartheta^r \vartheta^s \tag{20}$$

$$ds'^2 = \Phi'_{rs}\, \vartheta^r \vartheta^s - \Phi_{\alpha\beta}\, \vartheta^\alpha \vartheta^\beta . \tag{21}$$

Osservazione: I teoremi dimostrati precedentemente per le strutture quasi prodotto complesso sussistono inalterati per le strutture quasi prodotto reale (la decomposizione dello spazio tangente è relativa a T^R_n, il tensore caratteristico H è reale, g è reale). Anche per queste strutture abbiamo che la somma e la differenza delle metriche su Σ e su $\ominus$ definiscono due metriche adattate. Possiamo però in tale caso aggiungere che se la metrica g_{RS} è di tipo ellittico (cioè definita di segno, e allora dello stesso segno sono pure le due metriche parziali indotte su Σ e su $\ominus$), la metrica H_{RS} è invece di tipo iperbolico e precisamente dello stesso segno di g su Σ e di segno opposto su $\ominus$ e vi è un cono di direzioni nulle.

5. STRUTTURA QUASI PRODOTTO COMPLESSO INDOTTA DA UN TENSORE CARATTERISTICO REALE. – Se si assume nel caso di una struttura quasi prodotto complesso come tensore caratteristico un tensore reale H′ (nel caso esaminato al n. 2 era $H = iH'$ con H′ reale, cfr. [4]) si ha

$$H'^2 = -I \tag{22}$$

e dalle (7) si deduce

$$H'_{TM} = -H'_{MT} . \tag{23}$$

(2) In tutto il lavoro, gli indici greci variano da 1 a n_1, gli indici latini minuscoli da n_1 a n e gli indici latini maiuscoli da 1 a n.

Viene associata in tale caso alla metrica g una 2–forma H_{RS} di rango n.

Dal sistema di equazioni (7) si ricava

$$g_{\alpha\beta} = 0 \qquad g_{rs} = 0. \tag{24}$$

Tali condizioni sono compatibili con la condizione det $(g_{RS}) \neq 0$ solo se n è pari e $n_1 = n/2$ (3). Σ e $\ominus$ sono isomorfi e T_n^R è invariante per H'. Si ha allora

Osservazione: Una V_n munita di una metrica riemanniana adattata a una struttura quasi prodotto complesso non differisce sostanzialmente da una varietà quasi hermitiana se si prende come tensore caratteristico della struttura quasi prodotto un tensore reale.

Se la forma associata H'_{RS} è chiusa, $dH' = 0$, la V_n ha una struttura quasi kahleriana.

In un prossimo lavoro si studieranno le relazioni tra gli elementi geometrici associati alle due metriche definite mediante le (14) e le (16).

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. CATTANEO, *Proiezioni naturali e derivazione trasversa in una varietà riemanniana a metrica iperbolica normale*, « Ann. Mat. pura e appl. », *48*, 361 (1959).

[2] I. CATTANEO-GASPARINI, *Derivée covariante liée dans une* V_{n+1} *riemannienne à structure presque produit*, « C.R. Ac. Sc. Paris », 256 (1963).

[3] I. CATTANEO-GASPARINI, *Connessioni adattate a una struttura quasi prodotto*, « Ann. Mat. pura e appl. », *63*, 133–150 (1963).

[4] I. CATTANEO-GASPARINI, *Sulle G–strutture di una* V_n *definite da una 1–forma vettoriale* Φ (P), « Ann. Mat. pura e appl. » (1964).

[5] G. LEGRAND, *Étude d'une généralisation des structures presque complexes sur les variétés différentiables*, « Circ. Mat. Palermo », fasc. 3, T. VII (1958) e fasc. 2, T. VIII (1959).

[6] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Roma 1955.

[7] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa o quasi complessa*, Conf. sem. Mat. Un. Bari 1960.

[8] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, Springer Verlag, Berlin 1954.

[9] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, I Docet, Roma 1951.

[10] YANO e BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Princeton University press, 1953.

[11] D. C. SPENCER, *Differentiable manifolds, Notes*, Princeton University (1954).

[12] A. G. WALKER, *Connexions for parallel distributions in the large*, « Quart. J. Math. », (2) *6*, 301–308 (1955); (2), 221–231 (1958).

(3) Queste ultime condizioni sono quelle espresse da G. LEGRAND in [5] ove si considera H complesso $H^2 = \lambda^2$, ma si assume come definizione della struttura hermitiana generalizzata anziché la (1), la $(Hv, Hw) = -\lambda^2 (v, w)$ (con $\lambda = 1$ nel caso generalizzato in cui H è complesso, e $\lambda = i$ nel caso classico in cui H è reale). In entrambe le situazioni valgono allora le (24).