
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

L. A. ROSATI

Su alcuni problemi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.5, p. 615–622.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_615_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Su alcuni problemi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo* (*). Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

In un lavoro [3], pubblicato sugli «Annali di Matematica», nello spazio proiettivo (destro) di dimensione $r \geq 2$ sopra un corpo qualunque K ho introdotto certi enti che ho chiamato P -varietà e ne ho studiato le prime proprietà ritrovando in particolare anche alcuni risultati di B. Segre che allo studio della geometria non lineare sopra un corpo sghembo aveva dedicato una lunga Memoria [4].

In questa Nota studio le intersezioni delle P -ipersuperficie di S_r con le rette e, supposto che K abbia rango finito sopra il proprio centro, dimostro che condizione necessaria perché ogni P -ipersuperficie di S_r abbia almeno un'intersezione con tutte le rette di S_r è che K sia un corpo commutativo (algebricamente chiuso) oppure il corpo dei quaternioni sopra un campo reale chiuso. Rimane dunque aperto il problema di vedere se questa condizione sia anche sufficiente, come rimane aperto il problema della determinazione di un confine superiore ($\leq \infty$) per il numero delle intersezioni di una P -ipersuperficie d'ordine n con una retta di S_r che l'incontri in un numero finito di punti.

Avendo dimostrato in [3] l'esistenza in S_3 di due diverse specie di cubiche gobbe, studio anche le loro intersezioni con i piani e dimostro che se K è il corpo dei quaternioni reali ogni cubica gobba di seconda specie ammette almeno un'intersezione con qualunque piano di S_3 . Dimostro inoltre che, se ogni P -curva piana ha almeno un'intersezione con qualunque retta del suo piano, allora anche ogni cubica gobba di prima specie ha intersezioni con qualunque piano.

1. Siano: K un corpo qualunque, $V_n(K)$ lo spazio vettoriale sinistro a n dimensioni sopra K , T la trasformazione lineare di $V_n(K)$ in sé d'equazioni

$$\lambda_i = \lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_n a_{in} \quad (i = 1, \dots, n),$$

$A = \|a_{ik}\|$ la relativa matrice.

Secondo che T (e quindi A) sia invertibile o no diremo che il *determinante destro* di A non è equivalente a zero oppure è equivalente a zero e scriveremo rispettivamente

$$|A| \neq 0, \quad |A| = 0.$$

Chiameremo equivalenti due determinanti che entrambi siano equivalenti a zero oppure non equivalenti a zero.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività per l'anno 1963-64 dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 maggio 1964.

In modo analogo a quello tenuto per introdurre i determinanti destri si possono definire i determinanti sinistri. Indicheremo con $\|A\|$ il determinante sinistro della matrice A .

Dalla definizione di determinante destro risultano subito le seguenti proprietà:

1^a se la matrice B è ottenuta dalla matrice A moltiplicandone a destra tutti gli elementi di una riga o a sinistra tutti gli elementi di una colonna per un elemento di K diverso da zero allora $\|A\|$ e $\|B\|$ sono equivalenti;

2^a condizione necessaria e sufficiente perché il sistema

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_n a_{in} = \alpha_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

sia risolubile ed abbia una sola soluzione è che sia $\|a_{ij}\| \neq 0$;

3^a condizione necessaria e sufficiente perché il sistema omogeneo

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_n a_{in} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

abbia soluzioni non banali è che sia $\|a_{ij}\| = 0$.

Indichiamo con AB il prodotto colonne per righe delle due matrici A, B ;

4^a se B è invertibile allora $\|AB\|$ e $\|BA\|$ sono equivalenti ad A ;

5^a se tutti i minori d'ordine $h < n$, estratti dalle ultime h colonne di una matrice A d'ordine n , sono nulli allora $\|A\|$ è nullo.

Assegnati gli elementi di K b_{ij}, β_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) l'equazione nell'incognita x $\|b_{ij}x + \beta_{ij}\| = 0$ verrà chiamata una Δ -equazione e se $\|b_{ij}\| \neq 0$ diremo che essa ha grado n .

Se A è una qualunque matrice invertibile ad elementi in K , posto $B = \|b_{ij}x + \beta_{ij}\|$, per la proprietà 4^a si ha che ogni radice dell'equazione $\|B\| = 0$ è anche radice della $\|AB\| = 0$ e viceversa. Pertanto diremo *equivalenti* le due matrici B e AB e analogamente le due Δ -equazioni $\|B\| = 0$, $\|AB\| = 0$.

Richiamiamo ora la definizione di P -ipersuperficie.

Sia S_{r-1} ($r > 2$) lo spazio proiettivo destro sopra K di dimensione $r-1$. Indicati rispettivamente con $(x_1, \dots, x_r)$ e con $[\lambda_1, \dots, \lambda_r]$ i punti e gli iperpiani di S_{r-1} , supposte invertibili ($\|a_{ij}\| \neq 0, \|b_{ij}\| \neq 0$) le trasformazioni lineari

$$x'_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ir}x_r \quad (i = 1, \dots, r)$$

$$\lambda'_i = \lambda_1 b_{i1} + \dots + \lambda_r b_{ir} \quad (i = 1, \dots, r)$$

rappresentano, rispettivamente in coordinate di punto e di iperpiano, particolari collineazioni di S_{r-1} che chiameremo *proiettività*.

Ciò posto, siano $X_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) n^2 forme lineari omogenee nelle r variabili $x_1, \dots, x_r$ a coefficienti a sinistra e supponiamo che non sia identicamente $\|X_{ij}\| = 0$. Per la proprietà 1^a l'equazione

$$(I) \quad \|X_{ij}\| = 0$$

è tale che se $(x_1, \dots, x_r)$ la soddisfa, la soddisfa anche $(x_1 k, \dots, x_r k)$, qualunque sia $k \neq 0$ in K .

Diremo *P-ipersuperficie* di S_{r-1} d'ordine n il luogo $\mathcal{S}$ dei punti di S_{r-1} le cui coordinate omogenee verificano l'equazione (1).

Se $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ è una delle intersezioni di una *P-ipersuperficie* $\mathcal{S}$ d'ordine n con una retta t , eliminando $x_2, \dots, x_{r-1}$ tra le equazioni di $\mathcal{S}$ e di t , si ha che $\bar{x}_1, \bar{x}_r$ verificano una Δ -equazione

$$|b_{ij}x_1 + \beta_{ij}x_r| = 0,$$

dove b_{ij}, β_{ij} sono elementi di K dipendenti da $\mathcal{S}$ e da t e sarà $|b_{ij}| \neq 0$ se, e solo se, per tutte le intersezioni di $\mathcal{S}$ con t , risulta $x_r \neq 0$, cioè se $\mathcal{S}$ e t non hanno intersezioni improprie. In questo caso la prima coordinata non omogenea $x = x_1 x_r^{-1}$ di ciascuna delle intersezioni di $\mathcal{S}$ con t viene determinata dalla Δ -equazione di grado n

$$(2) \quad |b_{ij}x + \beta_{ij}| = 0 \quad (|b_{ij}| \neq 0).$$

Si ha subito allora il seguente

TEOREMA 1. — *Condizione necessaria e sufficiente perché ogni ipersuperficie di S_{r-1} abbia intersezioni con qualunque retta è che, presa una qualunque matrice quadrata ad elementi in K , si possa trovare un elemento di K , x , tale che detta I la matrice identica, risulti $|A + xI| = 0$, cioè la matrice $A + xI$ risulti non invertibile.*

Infatti ogni ipersuperficie di S_{r-1} avrà almeno una intersezione con ogni retta se e solo se ogni Δ -equazione (2) di grado n qualsiasi avrà almeno una soluzione. Posto $|b_{ij}| = B$, $|b_{ij}x + \beta_{ij}| = C$, la matrice $B^{-1}C$ ha la forma $A + xI$. D'altra parte, tenuto conto della proprietà 4^a, le Δ -equazioni $|C| = 0$ e $|B^{-1}C| = 0$ sono equivalenti ed il teorema è dimostrato.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 2. — *Sia la (2) una qualunque Δ -equazione di grado n . Esiste allora una Δ -equazione*

$$(3) \quad |c_{ij}(x - u_j)| = 0 \quad (|c_{ij}| \neq 0; i, j = 1, \dots, s)$$

di grado $s \leq n$ tale che ogni radice della (2) è anche radice della (3).

In [3] abbiamo dimostrato che, se la (2) ammette la radice $x = u_1$, esiste una Δ -equazione ad essa equivalente tale che tutti gli elementi di una sua colonna siano divisibili a destra per $x - u_1$. Supponiamo allora che la (2) ammetta le radici $u_1, \dots, u_h$ ($h \leq n$) e che esista una Δ -equazione $|N| = 0$ avente tutte le radici della (2) e di grado m minore o uguale a n tale che le sue prime h colonne siano divisibili a destra rispettivamente per $x - u_1, \dots, x - u_h$:

$$(4) \quad |N| \equiv |d_{i1}(x - u_1) \cdots d_{ih}(x - u_h) d_{i, h+1}x + \delta_{i, h+1} \cdots d_{im}x + \delta_{im}| = 0.$$

Per induzione ci basterà dimostrare che si verifica uno dei seguenti fatti:

a) tutte le radici della (2) sono le radici di una Δ -equazione di grado $h \leq n$

$$|d_{ijk}(x - u_j)| = 0 \quad (j, k = 1, \dots, h; 1 \leq i_k \leq n);$$

b) esiste una Δ -equazione avente tutte le radici della (2) e di grado $\leq n$ tale che le sue prime $h+1$ colonne siano divisibili a destra rispettivamente per $x-u_1, \dots, x-u_{h+1}$, essendo u_{h+1} un'altra radice della (2).

Se la (2) non ha altre soluzioni oltre $u_1, \dots, u_h$ si verifica il caso a). Ammettiamo allora che la (2) abbia altre soluzioni e che u sia una di esse. Esisteranno allora in K m elementi non tutti nulli, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che si abbia

$$(5) \quad \lambda_1 d_{i1}(u-u_1) + \dots + \lambda_h d_{ih}(u-u_h) + \lambda_{h+1}(d_{i,h+1}u + \delta_{i,h+1}) + \dots \\ \dots + \lambda_m(d_{im}u + \delta_{im}) = 0 \quad (i=1, \dots, m).$$

Distinguiamo due casi:

I) Qualunque sia u si ha sempre $\lambda_1 = \dots = \lambda_h$. In questo caso ogni radice della (2) diversa da $u_1, \dots, u_h$ è anche radice di ciascuna delle equazioni che si ottengono annullando i minori d'ordine $m-h$ estratti dalle ultime $m-h$ colonne della matrice N . Per ognuno di questi minori consideriamo il determinante destro formato con i coefficienti della x . Poiché la (4) ha grado m , tenuto conto della proprietà 5^a, almeno uno di questi determinanti sarà diverso da zero. Sia D il minore della N avente nei suoi elementi come coefficienti della x gli elementi di tale determinante. Se u_{h+1} è una radice della (2) diversa da $u_1, \dots, u_h$, per [3] potremo trovare una Δ -equazione equivalente alla $|D| = 0$ nella quale tutti gli elementi della prima colonna siano divisibili a destra per $x-u_{h+1}$. Allora la Δ -equazione

$$\begin{vmatrix} x-u_1 & \dots & x-u_h & & & \\ \dots & \dots & \dots & D & & \\ x-u_1 & \dots & x-u_h & & & \\ x-u_1 & \dots & x-u_h & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & & \\ x-u_1 & \dots & x-u_h & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ha grado $m \leq n$, ha gli elementi delle sue prime $h+1$ colonne divisibili a destra rispettivamente per $x-u_1, \dots, x-u_{h+1}$ e possiede tutte le radici della (2).

II) Esiste una radice u diversa da $u_1, \dots, u_h$ tale che $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ non siano tutti nulli. Per fissare le idee supponiamo $\lambda_h \neq 0$. In questo caso la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_h & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ottenuta dalla matrice identica sostituendo la colonna h -ma con la colonna $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ è invertibile. Allora per la proprietà 4^a la Δ -equazione $|MN| = 0$ è equivalente alla (5) e pertanto possiede tutte le radici della (2); tenuto conto della (5) si verifica subito che le sue prime $h+1$ colonne sono divisibili a

destra rispettivamente per $x - u_1, \dots, x - u_h, x - u$. Tenuto conto che il suo grado è minore o uguale a n si ha quanto si voleva dimostrare.

Il teorema dimostrato riduce il problema di vedere se esista un confine superiore per il numero delle intersezioni di una P-ipersuperficie d'ordine n con una retta che l'incontri in un numero finito di punti, a quello di vedere se esista un massimo per il numero delle soluzioni delle equazioni di tipo (3) di grado n che abbiano un numero finito di soluzioni. Nei riguardi di questo problema si può notare che acquistano un significato particolare le P-ipersuperficie di S_{n-1}

$$\|a_{ij} x_j\| = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

che, nel caso che K sia un corpo commutativo, si spezzano negli iperpiani coordinati.

TEOREMA 3. — *Sia K un corpo non commutativo di rango finito sopra il proprio centro C . Condizione necessaria perché ogni P-ipersuperficie dello spazio proiettivo destro S_{r-1} ($r > 2$) sopra K abbia almeno una intersezione con qualunque retta di S_{r-1} è che K sia il corpo dei quaternioni sopra un corpo reale chiuso.*

Basterà dimostrare che se una qualunque Δ -equazione di grado n a coefficienti in K ha almeno una soluzione in K , allora K è il corpo dei quaternioni sopra un corpo reale chiuso. Sia u un qualunque elemento di K . Si verifica facilmente che la Δ -equazione di grado n

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & & x & 1 \\ (-1)^n u & 0 & \dots & & 0 & x \end{array} \right\| = 0$$

ha per soluzioni tutte e sole le radici dell'equazione $x^n - u = 0$. D'altra parte ogni equazione $x^n - u = 0$ ha almeno una soluzione in K se e solo se K è il corpo dei quaternioni sopra un campo reale chiuso [2] ed il teorema è dimostrato.

2. Veniamo ora al problema dello studio delle intersezioni con i piani delle cubiche gobbe di S_3 .

Rammentiamo che, dati tre fasci proiettivi di piani ad assi sghembi, abbiamo chiamato in [3] *cubica gobba di prima specie* il luogo delle intersezioni di terne di piani corrispondenti. Una cubica gobba di prima specie è la residua intersezione di due quadriche non degeneri aventi una direttrice in comune. Essa può rappresentarsi [3] con un sistema.

$$(6) \quad \left\| \begin{array}{cc} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} X_3 & Y_3 \\ X_1 & Y_1 \end{array} \right\| = 0$$

formato con le equazioni di tre quadriche non degeneri aventi a due a due una direttrice in comune.

Date in S_3 due stelle proiettive di rette, abbiamo invece chiamato *cubica gobba di seconda specie* il luogo dei punti comuni a rette corrispondenti. Una cubica gobba di seconda specie è la residua intersezione di due quadriche aventi una generatrice in comune e può rappresentarsi mediante un sistema

$$(7) \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ Y_1 & Y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = 0$$

formato con le equazioni di tre quadriche non degeneri aventi a due a due una generatrice in comune.

TEOREMA 4. - *Se ogni P-curva piana ha almeno un'intersezione con qualunque retta del suo piano allora ogni cubica gobba di prima specie ha almeno una intersezione con qualunque piano.*

Supponiamo che ogni P-curva del piano proiettivo destro S_2 sopra K abbia almeno un'intersezione con ogni retta del suo piano. È chiaro che, se consideriamo il piano proiettivo sinistro $\bar{S}_2$ sopra K , ogni curva di $\bar{S}_2$ e in particolare ogni cubica avrà almeno un'intersezione con qualunque retta dello stesso piano.

Sia $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$ l'equazione di un qualunque piano β dello spazio proiettivo destro S_3 sopra K . Supposto per fissare le idee $b_4 \neq 0$, la cubica gobba $\mathcal{C}$ d'equazioni (6) avrà almeno un'intersezione con β se e solo se avrà almeno una soluzione non banale il sistema

$$(8) \quad \begin{vmatrix} c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + c_{i3} x_3 & d_{i1} x_1 + d_{i2} x_2 + d_{i3} x_3 \\ c_{j1} x_1 + c_{j2} x_2 + c_{j3} x_3 & d_{j1} x_1 + d_{j2} x_2 + d_{j3} x_3 \end{vmatrix} = 0$$

(ij è una qualunque combinazione di classe 2 dei tre numeri 1, 2, 3) ottenuto eliminando x_4 tra le equazioni di $\mathcal{C}$ e quelle di β .

Se le tre rette di S_2 $d_{i1} x_1 + d_{i2} x_2 + d_{i3} x_3 = 0$ ($i = 1, 2, 3$) hanno un'intersezione ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$) il sistema (8) possiede la soluzione non banale $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Supposto che tali tre rette non abbiano un punto in comune, cioè che sia $\|d_{ij}\| \neq 0$, a meno di cambiamenti di coordinate, si potrà supporre che sia $d_{i1} x_1 + d_{i2} x_2 + d_{i3} x_3 \equiv x_i$ ($i = 1, 2, 3$). E si potrà anche supporre che i tre piani $c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + c_{i3} x_3 = 0$ non abbiano un punto in comune, cioè che sia $\|c_{ij}\| \neq 0$. Pertanto per dimostrare il teorema ci basterà verificare che il sistema

$$(9) \quad \begin{vmatrix} c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + c_{i3} x_3 & x_i \\ c_{j1} x_1 + c_{j2} x_2 + c_{j3} x_3 & x_j \end{vmatrix} = 0, \quad \|c_{ij}\| \neq 0$$

ha almeno una soluzione.

Poiché per quanto abbiamo supposto ogni curva di $\bar{S}_2$ ha almeno un'intersezione con qualunque retta dello stesso piano, per il teorema 1, posto $\|c_{ij}\| = \|C\|$, esisterà un elemento k appartenente a K tale che si abbia

$\|C - kI\| = 0$ e poiché $\|C\| \neq 0$, sarà $k \neq 0$. In altre parole esisteranno degli elementi $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ di K non tutti nulli tali che risulti

$$(c_{11} - k) \bar{x}_1 + c_{12} \bar{x}_2 + c_{13} \bar{x}_3 = 0$$

$$c_{21} \bar{x}_1 + (c_{22} - k) \bar{x}_2 + c_{23} \bar{x}_3 = 0$$

$$c_{31} \bar{x}_1 + c_{32} \bar{x}_2 + (c_{33} - k) \bar{x}_3 = 0.$$

Corrispondentemente, per definizione di determinante destro si avrà

$$\begin{vmatrix} c_{11} \bar{x}_1 + c_{12} \bar{x}_2 + c_{13} \bar{x}_3 & \bar{x}_1 \\ c_{21} \bar{x}_1 + c_{22} \bar{x}_2 + c_{23} \bar{x}_3 & \bar{x}_2 \\ c_{31} \bar{x}_1 + c_{32} \bar{x}_2 + c_{33} \bar{x}_3 & \bar{x}_3 \end{vmatrix} = 0,$$

cosicché il sistema (9) possiede la soluzione $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ed il teorema è dimostrato.

TEOREMA 5. — *Se K è il corpo dei quaternioni reali ogni cubica gobba di seconda specie ha almeno una intersezione con qualunque piano.*

Questo teorema discende subito dai seguenti due lemmi:

I) Sia $|a_{ij}|$ ($i, j = 1, 2, 3$) un qualunque determinante destro del terz'ordine diverso da zero. Se esistono quattro elementi di x_1, x_2, x_3, k di K ($k \neq 0$; x_1, x_2, x_3 non tutti e tre nulli) tali che si abbia

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 = x_i k \quad (i = 1, 2, 3)$$

allora ogni cubica gobba di seconda specie di $S_{3,K}$ ha almeno un'intersezione con qualunque piano.

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema 4.

II) Ogni proiettività dello spazio proiettivo destro di dimensione n sopra il corpo dei quaternioni reali possiede almeno un punto unito.

Sia K^n lo spazio proiettivo destro sopra il corpo K dei quaternioni reali, di dimensione n . Come varietà reale, K^n ha dimensione reale $4n$ ed è compatta e pertanto si può applicare la formula di Lefschetz sui punti fissi.

Sia $f: K^n \rightarrow K^n$ una trasformazione continua di K^n in sé; $H^i(K^n, \mathbf{R})$ sia lo spazio vettoriale (di dimensione finita sui reali perché K^n è compatta) di coomologia sui reali $\mathbf{R}$, di dimensione i ($i = 0, \dots, 4n$).

La trasformazione f induce una trasformazione lineare in $H^i(K^n, \mathbf{R})$ ($i = 0, \dots, 4n$) di matrice V_i . Il numero di Lefschetz di f è dato da

$$\mathfrak{L}(f) = \sum_{i=0}^{4n} (-1)^i \text{Tr}(V_i)$$

e se $\mathfrak{L}(f) \neq 0$ f ha almeno un punto fisso.

Osserviamo ora che:

a) se I è la trasformazione identica di K^n in sé si ha $\mathfrak{L}(I) = \chi(K^n)$, dove $\chi(K^n)$ è la caratteristica di Eulero-Poincaré di K^n ;

b) $\mathfrak{L}(f)$ è invariante per omotopie: se f_1 ed f sono omotope $\mathfrak{L}(f_1) = \mathfrak{L}(f)$;

c) se f è una proiettività di K^n , f è omotopa all'identità. Infatti il gruppo proiettivo quaternione è quoziente del gruppo lineare quaternione sugli scalari reali ed il gruppo lineare quaternione è connesso.

Da a), b), c) segue che, se f è una proiettività di K^n , allora $\varrho(f) = \chi(K^n)$, sicché per dimostrare il lemma basta verificare che $\chi(K^n) \neq 0$. Dimostriamo che $\chi(K^n) = n + 1$.

Infatti, detto $\mathbf{R}^{4n}$ lo spazio numerico reale di dimensione $4n$ si ha $K^n - K^{n-1} = \mathbf{R}^{4n}$. Si ha allora la successione esatta di coomologia (a supporti compatti) [1]

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^p(\mathbf{R}^{4n}, \mathbf{R}) &\longrightarrow H^p(K^n, \mathbf{R}) \longrightarrow H^p(K^{n-1}, \mathbf{R}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^{p+1}(\mathbf{R}^{4n}, \mathbf{R}) \longrightarrow H^{p+1}(K^n, \mathbf{R}) \longrightarrow H^{p+1}(K^{n-1}, \mathbf{R}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Da questa, essendo $\chi(X) = \sum_p (-1)^p \dim H^p(X, \mathbf{R})$, si ottiene

$$\chi(K^n) = \chi(K^{n-1}) + \chi(\mathbf{R}^{4n}) = \chi(K^{n-1}) + 1$$

e pertanto $\chi(K^n) = n + 1$.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. GODEMEENT, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris 1958.
- [2] I. NIVEN, *Equations in quaternions*, « Amer. Math. Monthly », 48, 654-661 (1941).
- [3] L. A. ROSATI, *Su alcune varietà dello spazio proiettivo sopra un corpo non commutativo*, « Annali di Matematica », IV, 49, 213-228 (1962).
- [4] B. SEGRE, *Elementi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo*, « Rend. Circolo Mat di Palermo », II, 7, 81-122 (1958).