
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ADELINA SANTOLINI

A proposito delle trasformazioni topologiche del piano reale euclideo su se stesso

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 36 (1964), n.5, p. 609–614.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1964_8_36_5_609_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Matematica. — *A proposito delle trasformazioni topologiche del piano reale euclideo su se stesso.* Nota di ADELINA SANTOLINI, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In questa Nota ⁽¹⁾ mi propongo di dimostrare un teorema sugli automeomorfismi del piano reale euclideo ⁽²⁾. Precisamente intendo dimostrare che:

Se la trasformazione topologica t del piano reale euclideo su se stesso ammette almeno un punto unito U e se una delle potenze di t ammette come libera ⁽³⁾ una curva semplice chiusa che aggira U , quest'ultima circostanza si presenta anche per t .

Il teorema e la sua dimostrazione si trasportano subito agli automeomorfismi dei sottoinsiemi semplicemente connessi del piano. Qualche novità di enunciato e di deduzione si può forse presentare nel caso di insiemi pluriconnessi. Ma sulla questione non intendo insistere, almeno per ora.

1. Consideriamo dunque la trasformazione topologica t del piano reale euclideo su se stesso. La sua potenza n -esima t^n ammetta come libera una curva semplice chiusa che aggiri il punto unito U . La stessa circostanza si presenta allora anche per t^{-n} . Non è dunque restrittivo supporre che il numero intero n (non nullo) sia positivo (e maggiore di 1).

Sia j una curva semplice chiusa che aggiri U e che sia libera nella t^n . Indichiamo con

$$j_r \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

la trasformata di j nella t^r , di modo che $j_0 = j$; e con

$$J_r \quad (r = 0, 1, \dots, n)$$

la regione delimitata da j_r ⁽⁴⁾.

Poiché gli insiemi J_0 e J_n contengono entrambi nell'interno il punto U , la $j_0 \cap j_n = \emptyset$ implica la $J_0 \subset J_n - j_n$ ovvero la $J_n \subset J_0 - j_0$. Non è restrittivo supporre

$$(1) \quad J_0 \subset J_n - j_n,$$

perché nel caso contrario basterebbe scambiare gli uffici di t e t^{-1} e quelli di j_0 e j_n .

(*) Nella seduta del 9 maggio 1964.

(1) Eseguita nell'ambito dell'attività dei Gruppi Matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Il piano reale euclideo sarà dunque l'ambiente a cui riferiremo, nel seguito, ogni considerazione.

(3) Una curva libera in una trasformazione è una curva priva di punti in comune con la sua immagine nella trasformazione.

(4) Nel piano la regione delimitata da una curva semplice chiusa è l'insieme costituito dai punti della curva e da quelli che la curva separa dall'infinito.

Poiché il punto U è interno anche a $J_1, J_2, \dots, J_{n-1}$, l'insieme dei punti del piano che si possono unire ad U mediante curve semplici aperte prive di punti in comune con $j_0 \cup j_1 \cup \dots \cup j_{n-1}$ è delimitato da una curva semplice chiusa, γ_0 ⁽⁵⁾. La regione Γ_0 delimitata da γ_0 contiene nell'interno il punto U .

La curva γ_0 è contenuta ovviamente nell'unione di $j_0, j_1, \dots, j_{n-1}$:

$$(2) \quad \gamma_0 \subseteq j_0 \cup j_1 \cup \dots \cup j_{n-1};$$

l'insieme Γ_0 è ovviamente contenuto nell'intersezione di $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}$:

$$(3) \quad \Gamma_0 \subseteq J_0 \cap J_1 \cap \dots \cap J_{n-1}.$$

Dalla (1) e dalla (3) segue immediatamente

$$(4) \quad \gamma_0 \cap j_n = \emptyset;$$

e detta γ_1 l'immagine di γ_0 nella t , dalla (2) segue

$$(5) \quad \gamma_1 \subseteq j_1 \cup j_2 \cup \dots \cup j_n.$$

La regione Γ_1 delimitata da γ_1 è l'immagine, nella t , di Γ_0 ; perciò contiene anch'essa, nell'interno, il punto unito U .

Se γ_0 e γ_1 non hanno punti in comune il teorema è dimostrato. Supponiamo dunque che l'intersezione di γ_0 e γ_1 non sia vuota e dimostriamo che γ_0 e γ_1 non si tagliano mai.

Ragionando per assurdo supponiamo che γ_0 e γ_1 si taglino. Allora Γ_0 contiene nel suo interno punti esterni a Γ_1 . Se P è uno di questi punti, ogni curva semplice aperta che unisca P ad U incontra γ_1 , cioè $j_1 \cup \dots \cup j_n$. D'altra parte P , essendo interno a Γ_0 , può essere unito ad U mediante una curva semplice aperta, c , interna a Γ_0 e dunque priva di punti in comune con $j_0 \cup j_1 \cup \dots \cup j_{n-1}$; dalla (1) e dalla (3) segue inoltre $c \cap j_n = \emptyset$. E tutto questo è assurdo.

Poiché Γ_0 e Γ_1 contengono entrambe nell'interno il punto U e poiché γ_0 e γ_1 non si tagliano mai, o risulta $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_0$ ovvero $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$.

Supponiamo, se possibile, che sia $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$.

Consideriamo, accanto a γ_1 , la trasformata di γ_0 nella t^r ($r = 2, \dots, n$), che indicheremo con

$$\gamma_r \quad (r = 2, \dots, n),$$

mentre indicheremo con

$$\Gamma_r \quad (r = 2, \dots, n)$$

la regione delimitata da γ_r , immagine di Γ_0 nella t^r . Allora risulta, in virtù dell'ipotesi, $\Gamma_r \subseteq \Gamma_{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots, n$) e quindi anche $\Gamma_r \subseteq \Gamma_0$ ($r = 1, 2, \dots, n$). Di qui, dalla (1) e dalla (3) segue che $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ non hanno punti in comune

(5) Si veda, per esempio, G. SCORZA DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan* [« Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie 6^a, vol. XXIII (1936), pp. 181-186], n° 4.

con j_n ; perciò γ_1 non ha punti in comune con $j_1, j_2, \dots, j_n$, circostanza contraddetta dalla (5). Indi risulta $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_0$, anzi

$$(6) \quad \Gamma_1 \supset \Gamma_0,$$

poiché non può presentarsi la $\Gamma_1 = \Gamma_0$, avendo escluso la $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$.

2. Consideriamo ora gli insiemi, chiusi e limitati, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ definiti dalle

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \gamma_0 \cap \gamma_1, \\ \mathcal{E}_2 &= \gamma_0 \cap \gamma_1 \cap \gamma_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{E}_{n-1} &= \gamma_0 \cap \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_{n-1}, \\ \mathcal{E}_n &= \gamma_0 \cap \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_n, \end{aligned}$$

di modo che $\mathcal{E}_1 \supseteq \mathcal{E}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{E}_n$.

Indichiamo con $t(\mathcal{E}_r)$ ($r = 1, \dots, n-1$) l'immagine di $\mathcal{E}_r$ nella t . Ricordando la (2), la (4) e la (5) avremo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &\subseteq \gamma_0 \cap (j_1 \cup \dots \cup j_n) = \gamma_0 \cap (j_1 \cup \dots \cup j_{n-1}) \subseteq \\ &\subseteq (j_0 \cup \dots \cup j_{n-1}) \cap (j_1 \cup \dots \cup j_{n-1}) = j_1 \cup \dots \cup j_{n-1}; \\ \mathcal{E}_2 &= \gamma_0 \cap t(\mathcal{E}_1) \subseteq \gamma_0 \cap (j_2 \cup \dots \cup j_n) = \gamma_0 \cap (j_2 \cup \dots \cup j_{n-1}) \subseteq \\ &\subseteq (j_0 \cup \dots \cup j_{n-1}) \cap (j_2 \cup \dots \cup j_{n-1}) = j_2 \cup \dots \cup j_{n-1}; \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{E}_{n-1} &= \gamma_0 \cap t(\mathcal{E}_{n-2}) \subseteq \gamma_0 \cap (j_{n-1} \cup j_n) = \gamma_0 \cap j_{n-1} \subseteq \\ &\subseteq (j_0 \cup \dots \cup j_{n-1}) \cap j_{n-1} = j_{n-1}; \\ \mathcal{E}_n &= \gamma_0 \cap t(\mathcal{E}_{n-1}) \subseteq \gamma_0 \cap j_n = \emptyset. \end{aligned}$$

Indichiamo con m ($1 < m \leq n$) l'intero per cui risulta

$$\mathcal{E}_1 \neq \emptyset, \dots, \mathcal{E}_{m-1} \neq \emptyset,$$

ed inoltre

$$(7) \quad \mathcal{E}_m = \emptyset.$$

Una prima immediata conseguenza della (7) è la

$$(8) \quad \mathcal{E}_1 \subset \gamma_0,$$

poiché da $\mathcal{E}_1 = \gamma_0$ seguirebbe $\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_m$, e dunque $\mathcal{E}_m = \gamma_m$.

Vogliamo ora dimostrare, valendoci solamente della (6), della (7), della (8) e del fatto che γ_0 aggira il punto unito U , che possiamo modificare la curva γ_0 (e di conseguenza la curva γ_1) in modo tale che la curva modificata γ'_0 aggiri il punto U , non abbia punti in comune con la sua immagine γ'_1 nella t , tranne quelli contenuti in $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{m-1}$, e verifichi, insieme con γ'_1 , condizioni analoghe alle (6), (7), (8), ma con un valore, per m , diminuito almeno di una unità.

Per questa dimostrazione non è restrittivo supporre che γ_0 sia una circonferenza, poiché esistono trasformazioni topologiche del piano su se stesso che trasformano γ_0 in una circonferenza ⁽⁶⁾.

Indichiamo con C il centro e con R il raggio di γ_0 , con d la distanza, certamente positiva, di $t(\mathcal{E}_{m-1})$ da Γ_0 e con d^* la distanza, anch'essa positiva, del punto unito U da γ_0 .

Sia ε un numero reale positivo minore di d e δ un numero reale positivo conveniente. Le condizioni da imporre a δ saranno indicate nel corso del ragionamento; intanto imponiamogli quella di essere minore di d^* . Consideriamo il δ -intorno chiuso di $\mathcal{E}_{m-1}$ sulla circonferenza γ_0 ⁽⁷⁾: esso è costituito da un numero finito di componenti connesse, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_\lambda$, la cui unione non esaurisce completamente γ_0 , purché si sia assunto δ abbastanza piccolo. Sicché $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_\lambda$ sono archi, a due a due disgiunti se $\lambda > 1$.

La componente $\mathcal{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \lambda$) abbia per estremi i punti A_i e B_i . Dette A'_i e B'_i le intersezioni dei segmenti $A_i C$ e $B_i C$ con la circonferenza γ_0^* concentrica con γ_0 e di raggio $R - \delta$, in γ_0 sostituiamo $\mathcal{C}_i$ con la curva semplice aperta costituita dal segmento $A_i A'_i$, dall'arco $\mathcal{C}_i^*$ di γ_0^* di estremi A'_i e B'_i contenuto nel settore circolare delimitato da $A_i C \cup B_i C \cup \mathcal{C}_i$, dal segmento $B'_i B_i$. Fatto questo per ogni valore di i , otteniamo una curva semplice chiusa γ'_0 che è contenuta in Γ_0 , che coincide con γ_0 nei punti esterni al δ -intorno chiuso di $\mathcal{E}_{m-1}$ e che non ha punti in comune con $\mathcal{C}_i$, tranne gli estremi A_i e B_i ($i = 1, 2, \dots, \lambda$). Di qui e dalla (6) segue immediatamente la

$$(9) \quad \gamma'_0 \cap \gamma_1 \subseteq \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{m-1}.$$

Inoltre, poiché ogni punto di $A_i A'_i \cup \mathcal{C}_i^* \cup B'_i B_i$ ($i = 1, 2, \dots, \lambda$) ha distanza minore di $2 \cdot \delta$ da qualche punto di $\mathcal{E}_{m-1}$, γ'_0 differisce da γ_0 solamente in punti interni al $2 \cdot \delta$ -intorno piano chiuso di $\mathcal{E}_{m-1}$ ⁽⁸⁾.

La regione Γ'_0 delimitata da γ'_0 contiene nell'interno il punto U , perché $\delta < d^*$, e soddisfa alla

$$(10) \quad \Gamma'_0 \subset \Gamma_0,$$

perché γ'_0 è contenuta in Γ_0 e non coincide con γ_0 .

Poiché γ_0 e γ'_0 differiscono solamente in punti interni al $2 \cdot \delta$ -intorno piano chiuso di $\mathcal{E}_{m-1}$, basta impiccolire eventualmente δ , in corrispondenza al numero ε già fissato, per essere sicuri che γ_1 e γ'_1 differiscono solamente in punti interni all' ε -intorno piano chiuso di $t(\mathcal{E}_{m-1})$ ⁽⁹⁾; tale intorno non ha punti

(6) Cfr. B. V. KERÉKJÁRTÓ, *Topologie* (Springer, Berlino 1923) cap. 2, §2.

(7) È l'involucro chiuso dell'insieme dei punti di γ_0 aventi distanza minore di δ da qualche punto di $\mathcal{E}_{m-1}$.

(8) Il $2 \cdot \delta$ -intorno piano chiuso di un insieme E non vuoto è l'involucro chiuso dell'insieme costituito dai punti del piano che hanno distanza minore di $2 \cdot \delta$ da qualche punto di E .

(9) Si rammenti che t è continua in tutto il piano e che $\mathcal{E}_{m-1}$ è limitato.

in comune con Γ_0 , poiché $t(\mathcal{E}_{m-1})$ è esterno a Γ_0 e poiché $\varepsilon < d$; dunque nemmeno con Γ'_0 , per la (10); indi $\gamma'_0 \cap \gamma_1 = \gamma'_0 \cap \gamma'_1$. E la (9) equivale alla

$$(11) \quad \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \subseteq \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{m-1},$$

che era una delle condizioni imposte a γ'_0 .

Se si tiene conto anche della circostanza che γ_1 non contiene punti interni a Γ_0 , nelle considerazioni, precedenti è inoltre implicito che γ'_1 non contiene punti interni a Γ_0 . D'altra parte il punto unito U , essendo interno a Γ_0 , è interno alla regione Γ'_1 delimitata da γ'_1 ; ma il punto U è interno anche a Γ_0 e dunque $\Gamma_0 \subseteq \Gamma'_1$. Di qui e dalla (10) segue la

$$(12) \quad \Gamma_0 \subset \Gamma'_1.$$

Accanto a γ'_1 consideriamo l'immagine di γ'_0 nella t^r ($r = 2, \dots, m-1$), che indicheremo con γ'_r , e costruiamo gli insiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_1 &= \gamma'_0 \cap \gamma'_1, \\ \mathcal{E}'_2 &= \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \gamma'_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{E}'_{m-1} &= \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \dots \cap \gamma'_{m-1}. \end{aligned}$$

Se $\mathcal{E}'_1 = \emptyset$ il teorema è dimostrato. Supponiamo dunque $\mathcal{E}'_1 \neq \emptyset$.

La (11) implica la $\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \subset \gamma_0 \cap \gamma_1$; da cui la $\gamma'_{r-1} \cap \gamma'_r \subset \gamma_{r-1} \cap \gamma_r$ ($r = 2, \dots, m-1$); epperò accanto alla $\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \subset \gamma_0 \cap \gamma_1$ si trova

$$\begin{aligned} \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \gamma'_2 &= (\gamma'_0 \cap \gamma'_1) \cap (\gamma'_1 \cap \gamma'_2) \subseteq (\gamma_0 \cap \gamma_1) \cap (\gamma_1 \cap \gamma_2) = \\ &= \gamma_0 \cap \gamma_1 \cap \gamma_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \gamma'_2 \cap \gamma'_3 &= (\gamma'_0 \cap \gamma'_1) \cap (\gamma'_1 \cap \gamma'_2) \cap (\gamma'_2 \cap \gamma'_3) \subseteq \\ &\subseteq (\gamma_0 \cap \gamma_1) \cap (\gamma_1 \cap \gamma_2) \cap (\gamma_2 \cap \gamma_3) = \gamma_0 \cap \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3; \end{aligned}$$

e così via fino alla

$$\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \dots \cap \gamma'_{m-1} \subseteq \gamma_0 \cap \gamma_1 \cap \dots \cap \gamma_{m-1},$$

cioè alla

$$\mathcal{E}'_{m-1} \subseteq \mathcal{E}_{m-1};$$

ma la (11) implica altresì la $\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \mathcal{E}_{m-1} = \emptyset$, indi risulta

$$\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \mathcal{E}'_{m-1} = \emptyset;$$

d'altra parte

$$\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \mathcal{E}'_{m-1} = \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap (\gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \dots \cap \gamma'_{m-1}) = \gamma'_0 \cap \gamma'_1 \cap \dots \cap \gamma'_{m-1} = \mathcal{E}'_{m-1},$$

e dunque si conclude con la

$$(13) \quad \mathcal{E}'_{m-1} = \emptyset.$$

Dalla (13) segue immediatamente

$$(14) \quad \mathcal{E}'_i \subset \gamma'_0,$$

poiché $\mathcal{E}'_i = \gamma'_0$ implicherebbe $\gamma'_0 = \gamma'_i = \dots = \gamma'_{m-i}$ e $\gamma'_{m-i} = \mathcal{E}'_{m-i}$.

Sicché, in conclusione, le curve γ'_0 e γ'_i aggirano il punto unito U al pari di γ_0 e γ_i e, verificando la (12), la (13) e la (14), si trovano nelle stesse condizioni espresse, per γ_0 e γ_i , dalla (6), dalla (7) e dalla (8), ma con un valore, per m , diminuito almeno di una unità. E basta ripetere il ragionamento al massimo $m - 2$ volte, per concludere nel modo enunciato in principio.